SU(N)

Die lokalen Eichtransformationen ($U = N \times N$–Matrix)

$$U = e^{-ig\Lambda^a(x)\,T^a} \quad , \quad \Lambda^a \text{ reell} \quad , \quad U^\dagger U = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T = T^\dagger \ , \tag{S.1}$$

eines N–komponentigen Spinors (darum U unitär), deren $n = N^2 - 1$ Gereratoren T spurfrei sind, bilden eine (kontinuierliche, nicht–abelsche Lie–) Gruppe (n = ihre Dimension):

$$a = 1, \ldots, n \quad , \quad \mathrm{Sp}\,(T^a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \det(U) = e^{\mathrm{Sp}\,[\ln(U)]} = 1 \tag{S.2}$$

Jenes S in $SU(N)$ steht für *special* und dieses für $\det(U) = 1$.

Beispiel: zu $N = 3$, $n = 8$ und $T^a =: \lambda^a/2$ wählt Gell–Mann (1962)

$$\lambda^{1,2,3} = \begin{pmatrix} \sigma^{1,2,3} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^{4,5} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}_{\substack{\sigma^{1,2} \text{ in} \\ \text{die Ecken}}} \ , \ \lambda^{6,7} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \sigma^{1,2} \end{pmatrix} \ , \ \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Zu positiv–definitem U ($\Rightarrow U =: e^A$) gilt das vorletzte Gleichheitszeichen in (S.2) allgemein, denn

$$\begin{aligned} \partial_x \det\left(e^{xA}\right) &= \varepsilon_{j_1 \ldots j_N} \left\{ \left(Ae^{xA}\right)_{1j_1} \left(e^{xA}\right)_{2j_2} \cdots \ + \ \left(e^{xA}\right)_{1j_1} \left(Ae^{xA}\right)_{2j_2} \cdots \ + \ \ldots \right\} \\ &= A_{1\ell}\,\varepsilon_{j_1 \ldots j_N} \left(e^{xA}\right)_{\ell j_1} \left(e^{xA}\right)_{2j_2} \cdots \ + \ \ldots \ = \ A_{11}\,\varepsilon_{j_1 \ldots j_N} \left(e^{xA}\right)_{1j_1} \left(e^{xA}\right)_{2j_2} \cdots \ + \ \ldots \\ &= \mathrm{Sp}\,(A) \det\left(e^{xA}\right) \ \Rightarrow \ \det\left(e^{xA}\right) = C\, e^{x\mathrm{Sp}(A)} \ ; \ x = 0 \Rightarrow C = 1 \ ; \ x = 1 \ , \ A = \ln(U) \ \Rightarrow \ (\mathrm{S.2}) \ . \end{aligned}$$

Eine geeigete Orthonormierung (in *fundamentaler*, d.h. $N \times N$–Darstellung) ist

$$\mathrm{Sp}\left(T^a T^b\right) = \frac{1}{2}\,\delta^{ab} \ . \tag{S.3}$$

Damit Anwenden zweier U's eine neues U ergibt, müssen die Generatoren unter Kommutation *schließen*:

$$\left[\ T^a \ , \ T^b \ \right] \ = \ i\, f^{abc}\, T^c \ . \tag{S.4}$$

Die *Strukturkonstanten* f sind total antisymmetrisch (weil (S.3), (S.4) auf $f^{abc} = -2i\,\mathrm{Sp}\left(\left[T^a, T^b\right] T^c\right)$ führen). Beispiel: $N = 2$, $n = 3$, $T^a = \sigma^a/2$, $f^{abc} = \epsilon^{abc}$.

Die genannten T–Eigenschaften haben eigenwillige Relationen zur Folge. Eine beliebige hermitesche $N \times N$–Matrix M läßt sich nach 1 und T^a entwickeln, $M = m_0 \cdot 1 + m_a \cdot T^a$, und die Koeffizienten m folgen durch Bilden von $\mathrm{Sp}(M)$ und $\mathrm{Sp}(MT^a)$ zu $m_0 = \mathrm{Sp}(M)/N$, $m_a = 2\mathrm{Sp}(MT^a)$. Also ist $2\mathrm{Sp}(MT^a)T^a = M - \mathrm{Sp}(M)/N$, d.h.

$$2(T^a)^\alpha{}_\beta (T^a)^\gamma{}_\rho M^\rho{}_\gamma = \delta^\alpha{}_\rho \delta^\gamma{}_\beta M^\rho{}_\gamma - \tfrac{1}{N} \delta^\alpha{}_\beta \delta^\gamma{}_\rho M^\rho{}_\gamma \ , \ \Rightarrow \quad (T^a)^\alpha{}_\beta (T^a)^\gamma{}_\rho = \frac{1}{2}\left(\delta^\alpha{}_\rho \delta^\gamma{}_\beta - \frac{1}{N} \delta^\alpha{}_\beta \delta^\gamma{}_\rho\right) \ . \tag{S.5}$$

Zu $N = 2$ ($n = 3, T^a = \sigma^a/2$) geht (S.5) über in $(\sigma^a)^\alpha{}_\beta (\sigma^a)^\gamma{}_\rho = 2\delta^\alpha{}_\rho \delta^\gamma{}_\beta - \delta^\alpha{}_\beta \delta^\gamma{}_\rho$:

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \ = \ 2\,P_{12} - 1 \ . \tag{S.6}$$

Zu $\beta = \gamma$ und Summation entsteht aus (S.5)

$$T^a\, T^a = \frac{N}{2} - \frac{1}{2N} = \frac{n}{2N} \quad =: C_F \ . \tag{S.7}$$

Multipliziert man (S.5) mit $(T^b)^\beta{}_\gamma$ und summiert über β, γ, dann folgt wegen $\mathrm{Sp}(T^b) = 0$, daß

$$T^a T^b T^a = -\frac{1}{2N} T^b \ . \tag{S.8}$$

(S.8) und (S.7) geben schließlich

$$T^a T^b T^a T^b = -\frac{n}{4N^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} \ . \tag{S.9}$$

Alle Summenregeln für die Strukturkonstanten f lassen sich dadurch beweisen, daß man sie mittels (S.4) in T–Gleichungen überführt und dann (S.2), (S.3) und/oder (S.5) bis (S.9) verwendet – oder auch die *Jacobi–Identität*

$$[\ [A, B]\ , C\ ] \ + \ [\ [B, C]\ , A\ ] \ + \ [\ [C, A]\ , B\ ] \ = \ 0 \ . \tag{S.10}$$

Beispielsweise klärt sich

$$f^{acd} f^{cdb} \ = \ N \delta^{ab} \qquad , \qquad N =: C_A \ , \tag{S.11}$$

folgendermaßen auf, wobei zunächst (S.4), später (S.9) und (S.7) herangezogen werden:

$$T^a\,(\mathrm{S.11})\,T^b = -\left[T^c, T^d\right]\left[T^c, T^d\right] = -\,2T^c T^d T^c T^d + 2T^c T^d T^d T^c = \frac{n}{2N^2} + 2\left(\frac{n}{2N}\right)^2 = \frac{n}{2} \ .$$

(S.11) hilft dann bei der Herleitung von

$$(T^a)_{10} (T^b)_{04} f^{abc} (T^c)_{23} \ = \ \frac{i}{2} N (T^a)_{14} (T^a)_{23} \ , \tag{S.12}$$

nämlich wie folgt. Da f^{abc} in a, b antisymmetrisch, ist Ersetzung $(T^a)_{10}(T^b)_{04} \to \frac{1}{2}\left[T^a, T^b\right]$ erlaubt, ergo l.h.s. von (S.12) $= \frac{1}{2} i f^{abd} T^d_{14} f^{abc} T^c_{23} = \frac{1}{2} i T^d_{14}\, N \delta^{dc}\, T^c_{23}$, qed.

Aufgrund von (S.10) gilt im übrigen

$$f^{ab\bullet} f^{\bullet cd} + f^{bc\bullet} f^{\bullet ad} + f^{ca\bullet} f^{\bullet bd} \ = \ 0 \ , \tag{S.13}$$

und mit (S.13) wiederum sieht man ein, daß die f^{rsa}/i – mit r, s als Matrix–Indizes verstanden – die Beziehung (S.4) erfüllen: *adjungierte* Darstellung ($n \times n$). Manchmal ist es übrigens recht gescheit, sich die Bildung $f^{abc} A^b B^c$ mit $(A \times B)^a$ abzukürzen.

[Kurze (= kopierbare) Darstellungen finden sich in Cheng+Li *Gauge theory of elementary particle physics* (1984), Kapitel 4, und in DeWitt+Smith *Field theory in particle physics* (1986), Vol.1 , Anhang C]

(hschulz@itp.uni-hannover.de)