

# Kinderkreisel

im ersten Semester ??~~z~~ Kreiselei ist anstrengende Materie. Was da der „schwere symmetrische Kreisel“ (wenigstens der) Schönes treibt liegt andererseits ganz in Newtons Regierungsbezirk. Verstehen ist Rückführen. Ob also der Kreisel schon für Studienanfänger lehrreich sein kann, das steht und fällt damit, ob es eine hinreichend e l e m e n t a r e Herleitung gibt. Sie darf nicht nach Lagrange-Funktion greifen, sie soll ganz im Laborsystem bleiben, usw. Ob das denn möglich ist? Hier das Resultat unserer Neugier.

Der Kinderkreisel ist ein starrer Körper (Masse  $M$ ) mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten  $I_1 = I_2 =: I_{\text{quer}}$ , drehbar festgehalten an einem Punkt (hier der Ursprung), welcher auf der Symmetrieachse des Körpers liegt. Manchen Körpern homogener Massenverteilung (z.B. Kreis-Pyramide) kann man ansehen, wohin seine Hauptachsen zeigen.

**Der Ausgangspunkt.** Was wir brauchen:

$$\begin{aligned} \text{Schwerpunkt : } \vec{R} &:= \sum m_a \vec{r}_a / M & , & \quad \text{Drehimpuls : } \vec{L} := \sum \vec{r}_a \times m_a \vec{v}_a & , \\ \text{Trägheitstensor : } \vec{L} &:= \underline{I} \vec{\omega} \quad [\text{PB § 4.2}] & , & \quad \text{Drehmoment : } \vec{D} := \sum \vec{r}_a \times \vec{K}_a & , \\ \text{Kugelkoordinaten : } &\vartheta, \varphi & \text{ mit den Abkürzungen} \\ &S := \sin(\vartheta) & , & \quad C := \cos(\vartheta) & , & \quad s := \sin(\varphi) & , & \quad c := \cos(\varphi) & , \end{aligned}$$

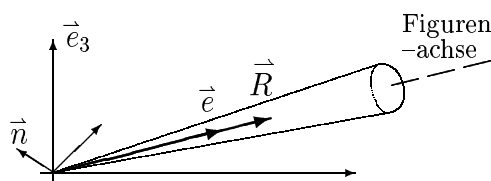
und wie es gemeint ist, wenn sich zwei  $\vec{\omega}$ 's addieren: „Motor ( $\vec{\omega}_2$ ) montiert auf Karussell ( $\vec{\omega}_1$ )“ [PB § 2.1, Bild 2-3]. Der Index  $a$  numeriert eine beliebige Anzahl von Teilchen,  $\vec{K}_a$  ist die Kraft auf das  $a$ -te und  $\sum$  läuft über alle. Soweit in Ordnung: all dies könnte um Weihnachten herum verstanden sein, geübt und verinnerlicht. Der oberste Regent über jegliche Mechanik (zu gegebenen Kräften) heißt Newton:  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{K}$  für jedes Teilchen der Welt. Er duldet keine nebenbuhlerischen „Gesetze“ neben sich.

Die Herleitung der Gleichung (1) (bitte bitte im Kopf!) zeigt  $\partial_t \vec{L} = \vec{D}$  (1) zweierlei: erstens, daß (1) allgemein gilt für jeden Haufen von Massenpunkten, und zweitens, daß es sich in der Tat nur um eine spezielle Abart von Newton handelt.

Ein starrer Körper hat 6 Freiheitsgrade (6 Parameter, die seine momentane Lage festlegen). 3 davon verbraucht der Schwerpunkt oder ebensogut irgendein anderer festgehaltener Punkt. Bleiben 3 für Rotation. Beim Kinderkreisel sind dies die zwei Kugelkoordinaten des Schwerpunktes und ein Winkel  $\psi$  um die Figurenachse. (1) hat drei Komponenten. Also i s t die „Newton-Abart“ (1) d i e Bewegungsgleichung des Kinderkreisels. Alles über ihn, einschließlich Nutation, muß aus (1) hervorgehen.

Wenn alle Massenpunkte des Kreisels nur die konstante Erdanziehung  $\vec{K}_a^{\text{äuß}} = -m_a g \vec{e}_3$  verspüren, und wenn die paarweisen inneren Kräfte (jene, die den Körper  $\approx$  starr erscheinen lassen) „ $a \approx r$ “ erfüllen (mit Richtung auf Verbindungslinie), dann fallen sie rechts in (1) in der Summe heraus ( $\vec{D}^{\text{innere}} = \sum_a \vec{r}_a \times \sum_b^{b \neq a} K_{(ab)} (\vec{r}_b - \vec{r}_a) = \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{a \neq b} K_{(ab)} [\vec{r}_a \times (\vec{r}_b - \vec{r}_a) + \vec{r}_b \times (\vec{r}_a - \vec{r}_b)] = \vec{0}$ ). Übrig bleibt

$$\vec{D} = \sum \vec{r}_a \times (-m_a g \vec{e}_3) = -g \sum m_a \vec{r}_a \times \vec{e}_3 = -Mg \vec{R} \times \vec{e}_3 \quad . \quad (2)$$



Wenn wir hier

$$\vec{R} = R \vec{e} \quad \text{mit} \quad \vec{e} = (Sc, Ss, C) \quad (3)$$

einsetzen, dann kommt — noch ganz allgemein — neben  $\vec{e}_3$  und  $\vec{e}$  (Figurenachse) noch ein dritter Einheitsvektor  $\vec{n}$  ins Spiel:

$$\vec{D} = MgRS \vec{n} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = (-s, c, 0) \quad . \quad (4)$$

Nachrechnen! Der Vektor  $\vec{n}$  liegt in der  $xy$ -Ebene, steht senkrecht auf  $\vec{e}$  und zeigt in der Figur-Situation nach links-hinten. Und nun los. Wir gehen stufenweise vor.

**Stufe 1:**  $\vartheta = \pi/2$ ,  $S = 1$ ,  $C = 0$ ,  $\dot{\varphi} =: \omega_{\text{pr}} = \text{const}_t$ ,  $\dot{\psi} =: \omega = \text{const}_t$ . Das sind arg einschränkende Vorgaben. Wir wagen es noch nicht, die Bewegungsgleichung zu lösen. Vielmehr richten wir nur die Frage an sie, ob solch eine spezielle Bewegung möglich ist (sofern man für geeignete Anfangsbedingungen sorgt). Auch Stufe 2 wird noch von dieser engstirnigen Art sein. Die Figur zeigt eine perfekte „Motor“ (die Figurenachse drehend) montiert auf Karussell (um  $\vec{e}_3$ ) Situation. Also addieren sich zwei  $\vec{\omega}$ 's:

$$\vec{\omega}_{\text{figu}} = \dot{\psi}(c, s, 0), \quad \vec{\omega}_{\text{karu}} = \dot{\varphi}(0, 0, 1), \quad \vec{\omega}_{\text{gesamt}} = (\dot{\psi}c, \dot{\psi}s, \dot{\varphi}) \quad (5)$$

Links in (1) brauchen wir jedoch den Drehimpuls  $\vec{L}$ . Auch dieser kann vektoriell zusammengesetzt werden. Sowohl  $\vec{\omega}_{\text{figu}}$  als auch  $\vec{\omega}_{\text{karu}}$  (weil  $\perp \vec{e}$ ) liegen auf Hauptachsen, so daß

$$\vec{L}_{\text{figu}} = I \vec{\omega}_{\text{figu}}, \quad \vec{L}_{\text{karu}} = J \vec{\omega}_{\text{karu}}, \quad \vec{L} = (I\dot{\psi}c, I\dot{\psi}s, J\dot{\varphi}), \quad (6)$$

wobei  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers bei Rotation um eine Achse  $\perp \vec{e}$  durch Ursprung ist und folglich nach Steiner über  $J = MR^2 + I_{\text{quer}}$  mit den eingangs notierten, auf Schwerpunkt bezogenen Hauptträgheitsmomenten zusammenhängt. Doppelt hält besser, mag nun jemand sagen, und zu (6) eine explizite, von (5) ausgehende Rechnung einfordern. OK. Dazu begeben wir uns mittels Drehmatrix  $D_z$  in das sich mit  $\varphi = \omega_{\text{prt}}$  drehende Karussell, weil in diesem  $\underline{I}$  diagonal bleibt:  $\vec{L} = \underline{I} \vec{\omega} = D_z^T \underline{I}' D_z \vec{\omega}$ , d.h.

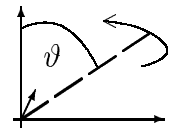
$$\vec{L} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}c \\ \dot{\psi}s \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I\dot{\psi} \\ 0 \\ J\dot{\varphi} \end{pmatrix} = (6) \quad .$$

Wir waren also vor (6) nur ein wenig „genial“. Es wird jetzt spannend, denn wir setzen (6) in (1) ein und halten beim Differenzieren  $\dot{\varphi} =: \omega_{\text{pr}}$  und  $\dot{\psi} =: \omega$  konstant. Ob das geht?

$$\partial_t (6) = \partial_t (I\omega c, I\omega s, J\omega_{\text{pr}}) = I\omega \omega_{\text{pr}} \vec{n} \stackrel{??}{=} MgR \vec{n} \quad \curvearrowright \quad \omega_{\text{pr}} = \frac{MgR}{I\omega} \quad (7)$$

Hurra, (1) war erfüllbar, d.h. die Vorgaben waren erlaubt und die Präzession mit  $\dot{\varphi} = \omega_{\text{pr}}$  gibt es tatsächlich, aber nur mit dem rechts in (7) stehenden Wert. Man muß also den (nach vorn gerichteten) Regenschirm möglichst schnell drehen ( $\omega$  groß, und sich selbst dabei nach links drehen), damit er links herum (auf dem linken Arm) langsam genug entfliecht. (7) ist Gleichung (5.52) in *Demtröder 1*. In dessen voranstehender Herleitungszeile sollte es jedoch  $D = |\partial_t \vec{L}| = \dots$  heißen (statt  $\partial_t L$ , denn das ist Null).

**Stufe 2:**  $\vartheta = \text{const}_t$ , aber  $\neq \pi/2$ . Wir fragen, ob die Figurenachse (statt in der  $xy$ -Ebene) auch auf einem Kegel ( $\vartheta$ ) mit  $\omega_{\text{pr}} := \dot{\varphi} = \text{const}_t$  umlaufen kann. Der Motor-auf-Karussell-Gedanke führt jetzt auf



$$\vec{\omega}_{\text{figu}} = \dot{\psi}(Sc, Ss, C), \quad \vec{\omega}_{\text{karu}} = \dot{\varphi}(0, 0, 1), \quad \vec{\omega}_{\text{gesamt}} = (\omega Sc, \omega Ss, \omega C + \dot{\varphi}), \quad (8)$$

worin wir wieder  $\dot{\psi} =: \omega$  gesetzt haben. Obacht, die tatsächliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\parallel}$  des Körpers um die momentane  $\vec{e}$ -Achse ist von  $\omega$  verschieden, denn  $\vec{\omega}_{\text{karu}}$  hat jetzt eine Projektion auf  $\vec{e}$ . Eine  $\parallel$ - $\perp$ -Zerlegung [PB (1.29)] steht an:

$$\vec{\omega}_{\parallel} = \vec{e} (\vec{\omega}_{\text{gesamt}} \cdot \vec{e}) = \vec{e} (\omega + \dot{\varphi}C), \quad \vec{\omega}_{\perp} = \vec{e} \times (\vec{\omega}_{\text{gesamt}} \times \vec{e}) = \dot{\varphi}S(-Cc, -Cs, S) \quad (9)$$

Nachrechnen! Es sind diese beiden  $\vec{\omega}$ 's, welche auf Hauptachsen liegen (und sich zu  $\vec{\omega}_{\text{gesamt}}$  addieren). Folglich kann der gesuchte Drehimpuls  $\vec{L}$  wieder „genial“ zu

$$\vec{L} = I \vec{\omega}_{\parallel} + J \vec{\omega}_{\perp} = I(\omega + \dot{\varphi}C) \vec{e} + J\dot{\varphi}S(-Cc, -Cs, S), \quad (10)$$

zusammengesetzt und in (1) eingesetzt werden.  $\omega$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $C$  und  $S$  sind zeitunabhängig, so daß

$$\partial_t \vec{L} = I(\omega + \dot{\varphi}C) \dot{\vec{e}} - J\dot{\varphi}^2 SC(-s, c, 0) = [IS(\omega + \dot{\varphi}C)\dot{\varphi} - J\dot{\varphi}^2 SC] \vec{n} \quad (11)$$

entsteht. (11)  $\stackrel{?!}{=} (4)$ . Es geht erneut gut : eckige Klammer =  $MgRS$ . Für die Präzessionsfrequenz  $\omega_{\text{pr}} := \dot{\varphi}$  haben wir damit die quadratische Gleichung

$$\omega_{\text{pr}} I \omega + \omega_{\text{pr}}^2 \cos(\vartheta) (I - J) = M g R \quad (12)$$

erhalten. (12) ist nicht *Demtröders* Gleichung (5.53). In der letzteren vermißt man den  $\omega_{\text{pr}}^2$ -Term. Erst mit  $\omega \rightarrow \infty$  ließe er sich vernachlässigen. Der Zweifel an (5.53) hatte übrigens diese unsere Bemühungen ausgelöst.

Es ging! Also doch Kreiselei im Ersten? Wenn Zeit und Gemütlichkeit für ungefähr so viel Rechnung bereitstehen, wohlan, dann ja. — Es ist fast immer nur die Zeit.



Erstaunliche Nebenresultate halten sich in (12) verborgen.

(I) Als quadratische Gleichung hat (12) z w e i Lösungen :  $\omega_{\text{pr}} = \frac{I \omega}{2 \cos(\vartheta) (J - I)} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MgR(J - I) \cos(\vartheta)}{I^2 \omega^2}} \right)$  (13)

Realisierbar sind b e i d e . Wandern wir mit  $\vartheta$  sanft an  $\pi/2$  heran, so geht die Minuszeichen-Lösung in (7) über, während die Pluszeichen-Frequenz nach  $+\infty$  (if  $J > I$ ) entschwindet. Von der „langsamen“ und der „schnellen“ Präzession ist die Rede bei *Goldstein (Klassische Mechanik)*. Von ihm kam auch die Rettung aus der Not der eigenen Zweifel : (12) ist Goldsteins Gleichung (5-70).

(II) Ist  $I$  genügend klein, so kann der Wurzelinhalt negativ werden, d.h. es ist nicht jede Neigung  $\vartheta$  realisierbar. Man kann zwar jede  $\vartheta$ -Anfangsbedingung wählen, aber der Kreisel vermag sie nicht zu halten. Usw. — Ohnehin wird es Zeit für die letzte Stufe.

**Stufe 3:** Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (1). Motor  $(\dot{\psi} \vec{e})$  auf Karussell  $(\dot{\vartheta} \vec{n})$  auf Karussell  $(\dot{\varphi} \vec{e}_3)$  gibt  $\vec{\omega}_{\text{gesamt}} = \dot{\psi} \vec{e} + \dot{\vartheta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{e}_3 = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}$  mit

$$\vec{\omega}_{\parallel} = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} C) \vec{e} \quad \text{und} \quad \vec{\omega}_{\perp} = \dot{\vartheta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{e}_3 - \dot{\varphi} C \vec{e} \quad \curvearrowright \quad (14)$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}_{\parallel} + J \vec{\omega}_{\perp} = J \dot{\vartheta} \vec{n} + J \dot{\varphi} \vec{e}_3 + \left( I [\dot{\psi} + \dot{\varphi} C] - J \dot{\varphi} C \right) \vec{e} \quad . \quad (15)$$

Multiplizieren wir  $\partial_t \vec{L} = \vec{D}$  der Reihe nach mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_3, \vec{e}, \vec{n}$  und nutzen  $\vec{e}_{\text{any}} \partial_t \vec{L} = \partial_t (\vec{e}_{\text{any}} \vec{L}) - \dot{\vec{e}}_{\text{any}} \vec{L}$  aus, so folgen zuerst zwei Erhaltungssätze,

$$L_3 = J \dot{\varphi} S^2 + I (\dot{\psi} + \dot{\varphi} C) C =: A = \text{const}_t \quad , \quad I (\dot{\psi} + \dot{\varphi} C) =: B = \text{const}_t \quad , \quad (16)$$

und schließlich, (16) zum Eliminieren nutzend, eine restliche echte Bewegungsgleichung für  $\vartheta$  :

$$J \ddot{\vartheta} = MgRS - \frac{(A - BC)(B - AC)}{JS^3} \stackrel{?!}{=} - \partial_{\vartheta} V(\vartheta) \quad . \quad (17)$$

Das effektive Potential

$$V(\vartheta) = MgR \cos(\vartheta) + \frac{(A - B \cos(\vartheta))^2}{2J \sin^2(\vartheta)} \quad (18)$$

sieht aufgetragen über  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta < \pi$ ) wie ein **U** aus, hat nur ein Minimum und saust an den Intervallrändern nach  $+\infty$ . Mit (18) sind wir bei *Landau+Lifschitz I* angekommen (§ 35, Aufgabe 1, Gleichung (6)). Unser  $V$  ist Landaus  $U_{\text{eff}}$  plus  $MgR$ ) und verweisen auf die dortige weitere Diskussion. Nur zweierlei. Erstens, per Multiplikation von (17) mit  $\dot{\vartheta}$  entsteht ein Energiesatz  $\frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta) = E'$  (bis auf Konstante tatsächlich die Energie), und man kann die Bewegung als Schwingung in der  $V$ -Mulde interpretieren (Nutation). Zweitens, Landaus und Goldsteins Lagrangesche Methode (auch nur eine Newton-Abart) ist „das einzig Wahre“ bei bewegungsbeschränkten Systemen, wovon der Starre Körper eines ist. — Wohlan, so wie auf diesen drei Blättern geht es aber a u c h .