$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\,(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

---

$BB^{-1}=1 \quad \curvearrowright \quad \partial_\mu B^{-1} = -B^{-1}(\partial_\mu B)B^{-1}$

---

$$\partial_\mu e^{M(x)} = \int_0^1 ds\;\; e^{sM(x)}\,[\,\partial_\mu M(x)\,]\;e^{(1-s)M(x)}$$

(( $X(s) := (\partial_\mu e^{sM})e^{-sM}$ , $\partial_s X(s) = (\partial_\mu e^{sM}M)e^{-sM} - (\partial_\mu e^{sM})Me^{-sM} = e^{sM}(\partial_\mu M)e^{-sM}$ , $\int_0^1 ds \ldots$ und $\| \cdot e^M$ ))

---

$$e^A B e^{-A} \;=\; e^{[A,\;\,]}B \;=\; B + [A,B] + \tfrac{1}{2}\,[A,[A,B]] + \;\ldots$$

(( $X(s) := e^{sA}Be^{-sA}$ , $\partial_s X(s) = e^{sA}\,[A,B]\,e^{-sA} = \left[A, e^{sA}Be^{-sA}\right] = [A, X(s)]$ , $X(0)=B \;\curvearrowright\; X(s) = e^{s[A,\;\,]}B$ ))

---

Baker–Campbell–Hausdorff formula :

$$e^A e^B = e^{A+B+X} \text{ mit } X = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 ds\; \frac{\left(1-e^{-s[B,\;\,]}e^{-[A,\;\,]}\right)^n}{1+n}\,B \;=\; \tfrac{1}{2}\,[A,B] + \mathcal{O}(\text{kubisch})$$

(( $e^A e^{sB} =: e^{C(s)}$ , $C(0)=A$ , $A+B+X = C(1) = A + \int_0^1 ds\; C'$ , $C' = \partial_s C(s)$ , $e^C B = \partial_s e^C = \int_0^1 dt\; e^{tC}C'e^{(1-t)C}$ , d.h. $e^C B e^{-C} = \int_0^1 dt\; e^{tC}C'e^{-tC}$ , $e^{[C,\;\,]}B = \int_0^1 dt\; e^{[tC,\;\,]}C'$ , $[C,\;\,]\,e^{[C,\;\,]}B = (e^{[C,\;\,]}-1)\,C'$ , $C' = g(e^{-[C,\;\,]})\,B$ mit $g(z) = \frac{-\ln(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-z)^n}{1+n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-z)^n}{1+n}$ . Und nun $e^{-[C,\;]}\ddagger = e^{-C}\ddagger e^C = e^{-sB}e^{-A}\ddagger e^A e^{sB} = e^{-s[B,\;]}e^{-[A,\;]}\ddagger$ ))

---

$$\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp(A)}} \quad . \qquad \text{Ist } A = \ln(U) \text{ möglich, so} \quad \det(\mathrm{U}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp}\,[\ln(\mathrm{U})]}$$

(( $\partial_s \det(\mathrm{e}^{\mathrm{sA}})$ $= \varepsilon_{j_1\ldots j_N}\left\{(Ae^{sA})_{1j_1}(e^{sA})_{2j_2}(e^{sA})_{3j_3}\cdot\ldots \;+\; (e^{sA})_{1j_1}(Ae^{sA})_{2j_2}(e^{sA})_{3j_3}\cdot\ldots \;+\; \ldots\right\}$

$= A_{1\ell}\,\varepsilon_{j_1\ldots j_N}(e^{sA})_{\ell j_1}(e^{sA})_{2j_2}(e^{sA})_{3j_3}\cdot\ldots \;+\; A_{2\ell}\,\varepsilon_{j_1\ldots j_N}(e^{sA})_{1j_1}(e^{sA})_{\ell j_2}(e^{sA})_{3j_3} \;+\; \ldots$

ist $\ell \neq 1$ im 1. Term (oder $\neq 2$ im 2. Term etc.), so kommt es auch an einem anderen Faktor vor, und $(\;)_{\ell j_1}(\;)_{\ell j_n}$ verschwindet wegen $\varepsilon$–Antisymmetrie. Ergo

$= A_{11}\,\varepsilon_{j_1\ldots j_N}(e^{sA})_{1j_1}(e^{sA})_{2j_2}(e^{sA})_{3j_3} \;+\; A_{22}\,\varepsilon_{j_1\ldots j_N}(e^{sA})_{1j_1}(e^{sA})_{2j_2}(e^{sA})_{3j_3} \;+\; \ldots$

$= \mathrm{Sp}(A)\,\det(\mathrm{e}^{\mathrm{sA}}) \;\curvearrowright\; \det(\mathrm{e}^{\mathrm{sA}}) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{sSp(A)}}$ und $\mathrm{C}=1$ wegen $\det(\mathrm{e}^0)=1$ bei $\mathrm{s}=0$ ))

---

$A$, $B$, $C$, $D$ seien $N\times N$–Matrizen. det und Sp verarbeiten $2N\times 2N$–Matrizen :

$$\underline{\det}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \;=\; \det(\mathrm{D})\;\det(\mathrm{A}-\mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}) \;=\; \det(\mathrm{A})\;\det(\mathrm{D}-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B})$$

(( $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix}\left[1 + \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{pmatrix}\right]$ , $\underline{\det}(\ldots) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{D})\,\underline{\det}\,[1+\mathcal{M}]$ mit $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ S & 0\end{pmatrix}$ und $\mathrm{R} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ , $\mathrm{S} = \mathrm{D}^{-1}\mathrm{C}$ . $\ln(\underline{\det}\,[1+\mathcal{M}]) = \underline{\mathrm{Sp}}(\ln[1+\mathcal{M}]) = \underline{\mathrm{Sp}}\left(\mathcal{M} - \frac{1}{2}\mathcal{M}^2 + \frac{1}{3}\mathcal{M}^3 - \frac{1}{4}\mathcal{M}^4 + \ldots\right)$ , $\underline{\mathrm{Sp}}(\mathcal{M}^{\text{ung.}}) = 0$

$\underline{\det}\,[1+\mathcal{M}] = \mathrm{e}^{\underline{\mathrm{Sp}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Sp(RS)} - \frac{1}{2}\mathrm{Sp(RSRS)} - \frac{1}{3}\mathrm{Sp(RSRSRS)} - \ldots} = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp}[\ln(1-\mathrm{RS})]} = \det(1-\mathrm{RS}) = \det(1-\mathrm{A}^{-1}\mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C})$ ))

---

$-U_{,\mu}U^{-1} = U(U^{-1})_{,\mu}$ , $-ig\mathsf{A}_\mu^U = U(U^{-1})_{,\mu} + U(-ig\mathsf{A}_\mu)U^{-1}$ , $D_\mu^U := \partial_\mu - ig\mathsf{A}_\mu^U = UD_\mu U^{-1}$ ,

$[D_\mu, D_\nu]^U = [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UD_\mu D_\nu U^{-1} - UD_\nu D_\mu U^{-1} = U\,[D_\mu, D_\nu]\,U^{-1}$ .

$[\partial_\mu, f] = f_{,\mu} \;\curvearrowright\; F_{\mu\nu} := \frac{i}{g}\,[D_\mu, D_\nu] = \mathsf{A}_{\nu,\mu} - \mathsf{A}_{\mu,\nu} - ig\,[\mathsf{A}_\mu, \mathsf{A}_\nu]$ und $F_{\mu\nu}^U = UF_{\mu\nu}U^{-1}$ .

(hschulz@itp.uni-hannover.de)