ϕ^4 –Diagrammatik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2 - \frac{g^2}{4!}\,\phi^4$$

Der Ausgangspunkt :

Der Nenner c' hat sich bereits perfekt gegen den Wolken–Faktor im Zähler gekürzt (s. § 3.2). $W_0[\widetilde{\jmath}]$ wurde an $e^{i\int \mathcal{L}_{\text{int}}}$ vorbei nach links getauscht und dort per $\widetilde{\jmath} \equiv 0$ in eine Eins verwandelt :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{G}}_n &= \Big[\, \mathcal{Q}_1 \,\ldots\, \mathcal{Q}_n \, e^{\Re'}\, 1 \,\Big]_{\widetilde{\jmath}\equiv 0}^{\text{wolkenlos}} \quad , \quad \mathcal{Q}_j = (2\pi)^4 \frac{1}{i} \left(\delta_{\widetilde{\jmath}(-K_j)} - \frac{1}{(2\pi)^4} i\Delta(K_j)\widetilde{\jmath}(K_j) \right) \\
\Re' &= -ig^2 \frac{1}{4!} \int d^4k_1' \ldots d^4k_4' \;\; (2\pi)^4 \delta(K_1' + K_2' + K_3' + K_4') \;\cdot \\
& \cdot \left(\delta_{\widetilde{\jmath}(K_1')} - \frac{1}{(2\pi)^4}\, i\Delta(K_1')\, \widetilde{\jmath}(-K_1') \right) \Big(\quad {}_2 \Big) \Big(\quad {}_3 \Big) \Big(\quad {}_4 \Big) \\
i\Delta(K) &= \frac{i}{K^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{i}{K_0^2 - \vec{k}^{\,2} - m^2 + i\varepsilon} = \widetilde{G}_0(K) \\
& \qquad\qquad \text{hat Pole bei} \;\; K_0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{k}^{\,2}}
\end{aligned}$$

Die Regeln :

1. Malen. Verbinde die Bausteine $\times$ mit ihren Enden zu allen möglichen, topologisch verschiedenen, wolkenlosen Bildern. Jene mit n äußeren Beinen repräsentieren Beiträge zu $\widetilde{G}_n$. Regeln 2. bis 4. betreffen einen bestimmten solchen Beitrag.

2. Gib allen Linien eine Richtung sowie einen Impuls Q, K, $P-K$ usw. derart, daß an jedem Vertex gilt : $\sum$ einlaufende $= \sum$ auslaufende Impulse.

3. Bringe das folgende dem Diagramm entsprechende Produkt zu Papier : einen Propagator $\widetilde{G}_2^0$ für jede Linie (auch äußere) und einen Faktor $-ig^2$ für jeden Vertex. Integriere über jeden inneren Impuls K per $(\frac{1}{2\pi})^4 \int d^4k$.

4. Teile das Ganze durch den „Symmetriefaktor“ $$S \;=\; p \prod_{n=2,3,\ldots} 2^\beta\,(n!)^{\alpha_n}$$ where α_n is the number of *pairs* of vertices connected by n identical self–conjugate lines, β is the number of lines connecting a vertex with itself, and p is the number of permutations of vertices which leave the diagram unchanged with fixed external lines. [Cheng + Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Appendix B]

⚡⚡ Wer hiermit tatsächlich ernsthaft arbeitet, rechne besser sein Regel–4–Resultat explizit von Hand nach oder auch mit einem MAPLE–Programm.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)