Ein Integral

auszuwerten, ist in der Regel nicht mehr Gegenstand einer Theorie–Kurs–Vorlesung. Das Nachfolgende erlaubt jedoch (a) einen vergnüglichen Gang durch das Integrier−Arsenal und (b) eventuelle Wiederverwendung in der Elektrodynamik (dort zur Greenschen Funktion des Box-Operators). Bei der Funktion $G(t)$ handelt es sich um die *Response–Funktion des gedämpften 1D harmonischen Oszillators* : $\left[\,\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\,\right] x = k \;\;\Rightarrow\;\; x(t) = \int dt'\, G(t-t')\, k(t')$ ($k :=$ äußere Kraft pro Masse) und zugleich um die *Greensche Funktion* des zugehörigen linearen Operators : $\left[\,\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\,\right] G(t) = \delta(t)$. Folglich − im Kopf ? ! ! − ist

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{i\omega t}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega} \;=\; \text{reell}\;\begin{pmatrix}\text{weil } i\to -i \text{ per } \omega\to-\omega\\ \text{kompensierbar ist}\end{pmatrix}\quad, \tag{1}$$

$$= \frac{1}{4\pi W}\int d\omega\, e^{i\omega t}\left[\frac{1}{\omega+W-i\frac{1}{2}\gamma} - \frac{1}{\omega-W-i\frac{1}{2}\gamma}\right]\;,\; W := \sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{4}\gamma^2} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi W}e^{-iWt}\int d\omega\,\frac{e^{i\omega t}}{\omega-i\frac{1}{2}\gamma} \;+\; \text{dito}_{\,W\to -W} \quad (\text{ sei } \gamma < 2\omega_0\,) \tag{3}$$

$$\frac{e^{i\omega t}}{\omega-i\frac{1}{2}\gamma} = \frac{(c+is)(\omega+i\frac{1}{2}\gamma)}{\omega^2+\frac{1}{4}\gamma^2} = \frac{1}{\omega^2+\frac{1}{4}\gamma^2}\left(i\,s\,\omega \,+\, i\,\frac{1}{2}\gamma\, c \,+\, \text{Terme ungerade in } \omega\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi W}\,e^{-iWt}\,2\,i\,\left[\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega\,\sin(\omega t)}{\omega^2+\frac{1}{4}\gamma^2} \,+\, \int_0^\infty d\omega\,\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2+\frac{1}{4}\gamma^2}\right] + \;\; \text{dito}_{\,W\to -W} \tag{4}$$

Um obige Schritte zu kommentieren : Partialbruchzerlegung, Verschiebe-Trick, Real-Imaginärteil-Zerlegung, Verschwinden eines Integrals $\int_{-\infty}^{\infty}$ über ungerade Funktion, sodann $\int_{-\infty}^{\infty} = 2\int_0^\infty$. Die beiden Integrale in der eckigen Klammer entnehmen wir Bronstein (No. 17 und 18). Das ist zwar schlimm, aber man könnte sie sich auch von Standard-Übungsaufgaben zur Fourier-Transformation notiert haben (ferner : siehe unten) :

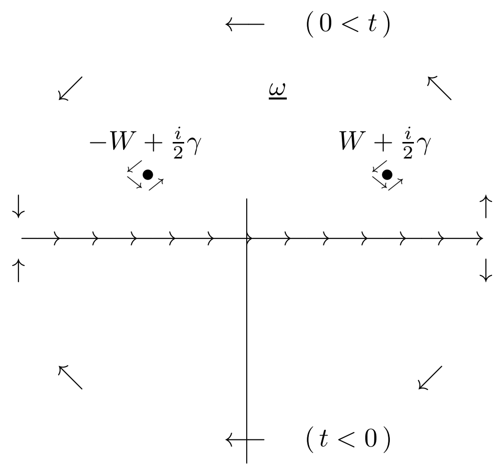
$$[\qquad] \;=\; \frac{\pi}{2}\,\text{sign}(t)\,e^{-|\frac{1}{2}\gamma t|} \;+\; \frac{\pi}{2}\,e^{-|\frac{1}{2}\gamma t|} \;=\; \pi\,\theta(t)\,e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \qquad (\;\theta(t) : \text{Kausalität !}\;) \tag{5}$$

Nehmen wir schließlich den "dito"-Term hinzu,

$$\frac{i}{W}e^{-iWt} \;+\; \text{dito}_{\,W\to -W} \;=\; \frac{i}{W}\left(e^{-iWt}-e^{iWt}\right) \;=\; \frac{2}{W}\,\sin(Wt) \quad , \tag{6}$$

so folgt als Endresultat

$$\underline{\underline{G(t) \;=\; \theta(t)\,\frac{1}{W}\,\sin(Wt)\;e^{-\frac{1}{2}\gamma t}}} \qquad \left(\to\;\theta(t)\,\frac{1}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t)\;\;\text{zu}\;\;\gamma\to 0\right) \quad . \tag{7}$$



So da aber einer *Funktionentheorie* kann (die Anfangsgründe genügen ; im 4. Semester ?) , sieht seine Rechnung ganz anders aus. Er geht in eine "komplexe ω-Ebene", markiert die reelle Achse als (obiger) Integrationsweg, sowie als dicke Punkte die Pole des Integranden (welche bei $\mp W + i\gamma/2$ liegen, beide in oberer Halbebene also) und ergänzt den Integrationsweg, falls $t > 0$, um einen riesigen oberen Halbkreis (und falls $t < 0$ um einen unteren). Im jeweiligen Falle gibt diese Ergänzung nur Null-Beitrag zum Integral. Dann zieht er das Kurvenintegral (in der komplexen Ebene) um die Pole zusammen (sofern vorhanden, zu $t < 0$ gibt es keine $\Rightarrow$ $G \sim \theta(t)$) und rechnet diese beiden Klein-Kringel-Integrale aus ("Residuen-Satz"). Zu (2) schreibt er

$$G(t) = \theta(t)\,\frac{1}{4\pi W}\;2\pi i\;\left(e^{it\,[\,\omega\text{ am linken Pol}\,]} \,-\, e^{it\,[\,\omega\text{ am rechten Pol}\,]}\right) = \theta(t)\,\frac{i}{2W}\,e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\;\left[-2i\,\sin(Wt)\right] \tag{8}$$

auf, − und schon ist er bei (7) angekommen. Unsicher, wie der Mensch zu sein pflegt, kramt er nun in alten Unterlagen, findet dieses „Sonderblatt" und freut sich, äh, daß Bronstein stimmt.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)