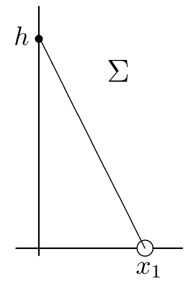
# Was Mister Tompkins sah

In Gamovs neckischer Geschichte träumt sich ein Abendschüler namens Tompkins in eine Welt mit $c = 30\,\mathrm{km/h}$ und staunt u.a. über einen abgeplatteten Radfahrer — amüsant nachzulesen in Gamov, *Mr. Tompkins seltsame Reisen durch Kosmos und Mikrokosmos* (Vieweg 1997). Im Nachgang zur Geschichte fand sich dann der niederschmetternde Kommentar, all das stimme natürlich nicht, weil die Laufzeiten der Lichtstrahlen vom Radfahrer zu Mr. Tompkins Auge unberücksichtigt geblieben seien. Schreck laß nach! Was sieht er denn nun wirklich?

Bald werden wir beruhigt sein (und in abschließender Fußnote dem o.g. Kommentar widersprechen), weil sich das Geschichtchen als „fast ganz in Ordnung" erweisen wird.

### Eine Uhr mit $v$ auf $x$–Achse




Auf dem Helm des Radfahrers sei eine Uhr montiert, Radweg = $x$–Achse. Mr. Tompkins steht bei $x = 0$, $y = h$ an der gegenüberliegenden Hauswand.

Ein Lichtsignal, welches zur $\Sigma$–Zeit $t_1$ von der Uhr ausgeht (egal, ob diese ruht oder in Bewegung ist), wird zur $\Sigma$–Zeit

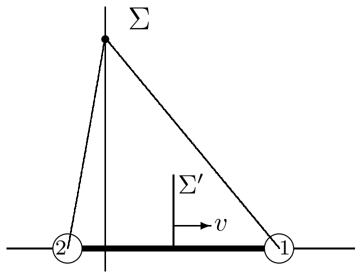
$$t = t_1 + \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + x_1^2} \tag{1}$$

bei Tompkins eintreffen. Die bewegte Uhr (Null–Uhr den Ursprung koinzidiert habend) ist ein Ereignis–Kontinuum mit $x_1 = vt_1$ ($t_1$ läuft). Wir „Wissenden" haben es leicht und können aus

$$\begin{pmatrix} ct_1' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_1 \\ vt_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,(1-\beta^2)\,ct_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

die Zeit $t_1' = t_1/\gamma$ entnehmen, welche Tompkins zum Zeitpunkt (1) sehen wird. Aber der arme Tompkins weiß nicht recht, womit er $t_1'$ vergleichen soll: seine Uhr zeigt etwas anderes. Wir können ihm helfen und an der Hauswand nahe Radweg (der Abstand sei vernachlässigbar) viele Uhren anbringen. Blickt nun Tonkins auf die bewegte Uhr, $t_1'$ zeigend, so sieht er zugleich und direkt dahinter die dortige Hauswanduhr, und diese zeigt $t_1$. „Aha! ich sehe die Zeitdilatation". Es ist egal, ob viele auf der $x$–Achse postierte infinitesimale Männchen die Zeiten ablesen. Aus der Ferne geht es genauso schön: kein Unterschied. Der Trivialfall ist entdeckt. Eine bewegte Uhr geht langsamer als es die Uhr**en** zeigen, an denen sie gerade vorüber kommt.

### Zwei Uhren an den Enden eines Stabes mit $v$




Es kommt uns zu teuer, die vielen Uhren an der Radweg–nahen Hauswand anzubringen. Tompkins möchte bewegte Uhren vergleichen. Die Mitte eines Stabes (Herstellungsmaß $2\,a'$) möge Null Uhr den Ursprung passieren. Die beiden Ereignis–Kontinua lauten jetzt $x_1 = a + vt_1$ und $x_2 = -a + vt_2$. Die zugehörigen Lorentz–Transformationen

$$\begin{pmatrix} ct_{1,2}' \\ \pm a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_{1,2} \\ \pm a + vt_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\,ct_{1,2} \mp \beta\gamma a \\ \pm\gamma a \end{pmatrix} \tag{3}$$

führen in der unteren Komponente auf die Längenkontraktion. In der oberen Kompontente steht nur, was die rechte (linke) Uhr anzeigt, w e n n man die $\Sigma$–Zeiten $t_1$ und $t_2$ der je zugehörigen Hauswanduhr kennen würde.

Mr. Tompkins hat kein Problem damit, zu einem bestimmten Zeitpunkt $t$ auf beiden

Uhren zugleich die Zeit abzulesen. Er kann sogar ein Auge zu halten (mit dem Zweiten sieht man besser). $t$ ist beliebig wählbar. Der zu $t$ eintreffende Strahl hat die Uhr 1 (bzw. 2) zu einer Zeit $t_1$ (bzw $t_2$) verlassen, welche gemäß nach (1) aus

$$t = t_1 + \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + (a + vt_1)^2} \qquad \text{bzw.} \qquad t = t_2 + \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + (-a + vt_2)^2} \tag{4}$$

zu ermitteln ist. Wir lösen die linke Gleichung (4) nach $t_1$ auf,

$$c^2\,(t - t_1)^2 = h^2 + (a + vt_1)^2 \quad , \quad (c^2 - v^2)\,t_1^2 - 2\,(c^2 t + av)\,t_1 + c^2 t^2 - h^2 - a^2 = 0$$

$$t_1^2 - 2\gamma^2(t + \beta a/c)\,t_1 + \gamma^2 t^2 - \gamma^2(h^2 + a^2)/c^2 = 0 \qquad \curvearrowright$$

$$t_1 \;=\; \gamma^2(t + \beta a/c) - \gamma\sqrt{\gamma^2(t + \beta a/c)^2 - t^2 + (h^2 + a^2)/c^2} \quad . \tag{5}$$

Das Vorzeichen der Wurzel haben wir daran festgemacht, daß $t^2 = (h^2 + a^2)/c^2$ nach (4) auf $t_1 = 0$ führen muß. Weil sich in (4) von der linken zur rechten Gleichung nur das Vorzeichen von $a$ ändert, läßt sich auch $t_2$ sofort angeben:

$$t_2 \;=\; \gamma^2(t - \beta a/c) - \gamma\sqrt{\gamma^2(t - \beta a/c)^2 - t^2 + (h^2 + a^2)/c^2} \quad . \tag{6}$$

Mit (5) und (6) kennen wir die Lichtsignal–Startzeiten an den beiden Uhren so, daß die Signale zur gleichen Zeit $t$ bei Mister Tompkins eintreffen. Die Uhr–Stellungen, die er sieht, folgen nun aus der oberen Komponente von (3) zu

$$t'_{1,2} \;=\; \mp\beta\gamma\frac{a}{c} + \frac{1}{\gamma}\left[\gamma^2(t \pm \beta a/c) - \gamma\sqrt{\quad\pm\quad}\,\right] \;=\; \gamma\, t - \sqrt{\quad\pm\quad} \quad , \tag{7}$$

wobei $\sqrt{\quad\pm\quad} := \sqrt{\gamma^2\left(t \pm \beta\frac{a}{c}\right)^2 - t^2 + \frac{h^2+a^2}{c^2}}$ die Wurzeln in (5) und (6) abkürzt. Wer sagt eigentlich, daß es in relativistischer Kinematik nicht viel zu rechnen gäbe.

Tags zuvor hatte natürlich Mr. Tompkins mit den $\Sigma'$–Leuten telefoniert und sich versichern lassen, daß deren Uhren richtig gehen. Auch hatte er gelernt, daß räumlich separierte Ereignisse, welche von $\Sigma$–Leuten zur gleichen Zeit $t$ betrachtet werden, wegen $\begin{pmatrix} ct'_{1,2} \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma x_{1,2} \\ \ldots \end{pmatrix}$ verschiedene $\Sigma'$–Uhrzeiten haben. Er weiß also, daß zu $x_1 - x_2 = 2a$

$$(t'_2 - t'_1)^{\Sigma-\text{Leute}} = \beta\gamma\frac{2a}{c} \tag{8}$$

gilt und das linke Ereignis die größere $\Sigma'$–Zeit hat. Er aber bekommt dies mit einer Korrektur $K$ zu Gesicht:

$$\Delta t' := t'_2 - t'_1 = \sqrt{\quad+\quad} - \sqrt{\quad-\quad} \;=\; \beta\gamma\frac{2a}{c}\,K \quad , \quad K = \frac{2\gamma t}{\sqrt{\quad+\quad} + \sqrt{\quad-\quad}} \quad . \tag{9}$$

Ob das stimmt? Wir können (9) testen.

### Symmetrischer Spezialfall

In dem Moment (Zeit Null), wo die Stabmitte den Ursprung passiert, haben die beiden Lichtsignale gleiche Laufzeit $\sqrt{h^2 + a^2}/c$. Die Signale starten also bei $t_1 = t_2$. (5) = (6) besagt, daß Tompkins zur Zeit $t = \sqrt{h^2 + a^2}/c$ empfängt. Dies gibt $t_1 = 0$ in (5) und $t_2 = 0$ in (6). Aus den beiden Wurzeln wird

$$\sqrt{\quad+\quad}^{\,\text{Symmetrie}} = \gamma t + \beta\gamma\frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \sqrt{\quad-\quad}^{\,\text{Symmetrie}} = \gamma t - \beta\gamma\frac{a}{c}$$

$$\curvearrowright \qquad K^{\text{Symmetrie}} = 1 \quad . \tag{10}$$

Tompkins sieht also in symmetrischer Situation das Gleiche wie seine Hilfsassistenten auf der $x$–Achse. (9) hat funktioniert.

Mit der Zeit $t$ (Tompkins' Augenaufschlag) dürfen wir spazieren gehen. Bei $t = 0$ wird offenbar $K = 0$ und die Wurzeln werden gleich. Tompkins sieht gleiche Zeigerstellung der beiden Uhren. Die Stabmitte liegt noch links vom Ursprung. Die Effekte der Laufzeiten haben die relativistischen gerade kompensiert. Die Kompensation ist im Mittelteil von (7) noch erkennbar. Bei $t < 0$ wird $\Delta t'$ negativ. Von der Seite, salopp gesagt, sieht man alles Mögliche.

Die symmetrische Situation kann auch im Grenzfall erreicht werden. Wir postieren Mr. Tompkins einfach weit genug weg vom Radweg, Lichtjahre weit weg. Er ist nun Astronom auf einem fernen Planeten. In (9) heißt dies, $h \to \infty$ auszuführen und (möglichst) $K \to 1$ dabei zu erhalten. Kein Problem:

$$h \to \infty \text{ und zugleich } t \to \frac{h}{c} \ : \quad \sqrt{\quad \pm \quad} \to \gamma \frac{h}{c} \text{ und } K \to 1 \ . \tag{11}$$

(9) wird (8). Weit draußen wird man also wieder zum $\Sigma$–$x$–Achsen–Bewohner, zu jedem gewünschten. In einer Variante haben wir den Trivialfall erneut entdeckt.

Natürlich darf auch $t \to \infty$ betrachtet werden, $h$ fest. Jetzt blickt Tompkins zuguterletzt in genau $x$–Richtung und sieht den Stab als Punkt. Was sich dabei für $\Delta t'$ ergeben sollte, ergründen wir vorab. Die Überlegung wird extrem einfach, wenn wir uns dazu in das gestrichene System begeben:


Damit das von Uhr 2 ausgehende Lichtsignal zur gleichen Zeit (ob Gleichheit von $\Sigma$– oder $\Sigma'$–Zeiten, ist am gleichen Ort egal) am $\Sigma$–Ursprung eintrifft, muß es um $2a'/c$ später abgesandt werden: $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 2a'/c$, fertig! — Auch mittels (9),

$$t \to \infty \ : \ \sqrt{\quad \pm \quad} \to \sqrt{\gamma^2 t^2 - t^2} \to \gamma\beta t \ \curvearrowright \ K \to \frac{1}{\beta} \text{ und } \Delta t' \to \gamma \frac{2a}{c} = \frac{2a'}{c} \ , \tag{12}$$

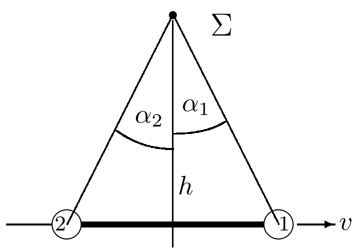
kommt dies tatsächlich heraus. Test gelungen.

**Längenkontraktion**

Der Stab ist zwar (gegenüber dem Herstellungsmaß $2a'$) auf $2a$ kontrahiert. Wie dann jedoch der kontrahierte Stab von $(0, h)$ (von Tompkins) aus wahrgenommen wird, das hat mit Relativistik nichts mehr zu tun. Allein mit Laufzeiteffekten haben wir uns jetzt herumzuschlagen. Bei $c$ kann es sich auch um die Strahlgeschwindigkeit einer Wasserpistole handeln (um zur Weihnachtszeit nicht gerade an Maschinengewehre zu denken). Es möge jedoch $c > v$ gelten.

Tompkins kennt seinen Abstand $h$ zum Radweg. Zumindest in symmetrischer Situation (bei der wir im Wensentlichen bleiben werden) kann sein Gehirn den Winkel zwischen den zwei Uhr–Lichtsignalen zur Länge des Stabes (des Fahrrades) verarbeiten:

$$\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2) = \frac{2a}{h} \tag{13}$$




Bei $(0, h)$ kann auch eine Filmkamera laufen, auf deren Bildern die Zeit $t$ vermerkt ist. Oder der Auslöser einer dortigen Lochkamera kann auf bestimmte Zeiten $t$ eingestellt werden. Bei

Symmetrie ist natürlich $\alpha_1 = \alpha_2$, die Signale starteten beide bei $t_1 = t_2 = 0$ und kamen zur Zeit $t = \sqrt{h^2 + a^2}\,/c$ in der Kamera an. Tompkins „sieht" Stablänge $2a$.

Alles scheint in Ordnung, solange nicht jemand boshaft fragt, wo denn zur genannten Zeit $t = \sqrt{h^2 + a^2}\,/c$ der Radkranz (die rot angefärbte Stabmitte) zu sehen sei. Oh weh. Dessen Lichtsignal wurde nämlich erst später ausgesandt, weil es kürzeren Weg hatte. Der Radkranz (= Stabmitte) folgt $x_{\text{kranz}} = v\,t_{\text{kranz}}$. Verläßt ihn das Signal zur Zeit $t_{1,\,\text{kranz}}$, so befindet er sich bei $v\,t_{1,\,\text{kranz}} =: b$. Soll dieses Signal zur Zeit $t$ ankommen, muß

$$t_{1,\,\text{kranz}} + \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + b^2} = t_{1,\,\text{kranz}} + \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + v^2 t_{1,\,\text{kranz}}^2} \overset{!}{=} t = \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + a^2} \tag{14}$$

gelten, aufzulösen nach $v\,t_{1,\,\text{kranz}}$. Solcherlei wurde schon einmal bei der Herleitung von (5) vollführt. Wir haben dort nur zuerst $a = 0$ zu setzen und dann $t = \sqrt{h^2 + a^2}\,/c$. Das gibt

$$t_{1,\,\text{kranz}} = \frac{1}{c}\,\gamma^2\left(\sqrt{h^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + \beta^2 a^2}\right) \quad \text{und} \quad b = v\,t_{1,\,\text{kranz}} \;. \tag{15}$$

Wie erwartet sind beide Größen, $b$ und $t_{1,\,\text{kranz}}$, positiv. Tompkins wundert sich ein wenig über des Fahrrades Asymmetrie (Zahnkranz links der Mitte). Aber sein Foto zeigt es auch. Nun, dann ist das eben so.

„Vielleicht", kommt ihm nun in den Sinn, "sollte ich mir mal den ganzen Film anschauen". Richtig, es findet sich auch das zur Zeit $h/c$ aufgenommene Bild. Auf diesem sitzt der Radkranz sehr artig in der Bildmitte. Aus alter Gewohnheit wird nun das Auge (besser: der hinter ihm angeworfene Teil des Gehirns) via $\tan(\alpha_1) = x_1/h$ und $\tan(\alpha_2) = (-x_2)/h$ auf Stablänge $x_1 + (-x_2)$ plädieren:

$$2\,\overline{a} := x_1 - x_2 = a + vt_1 - (-a + vt_2) = 2a + \Delta \qquad \text{mit} \qquad \Delta = v\,(t_1 - t_2) \qquad , \tag{16}$$

wobei sich $t_1$ und $t_2$ aus (5) bzw. (6) mit $t = h/c$ bestimmen. Etwas Rechnerei (welche $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$ ausnutzt) führt auf

$$\Delta = \gamma^2\beta\,\left[2\beta a - \left(\sqrt{h^2 + a^2 + 2\beta h a} - \sqrt{h^2 + a^2 - 2\beta h a}\right)\right] \;. \tag{17}$$

Ist dies nun positiv oder negativ? Zu $h = 0$ wird $\Delta = \gamma^2\beta \cdot 2\beta a > 0$ und zu $h \to \infty$ wird es Null (Trivialfall erneut erreicht). Mit etwas Mühe zeigt man auch, daß es dazwischen keine Nullstelle gibt. Also ist generell $\Delta > 0$ und folglich $\overline{a} > a$. Auf Radkranz fixiert „sieht" das Auge den Stab zu lang. Wohlgemerkt, es handelte sich hier nur um reine (wiewohl recht ungewohnte) Laufzeiteffekte.[1]

### Alptraum

Während der ganzen Darwinschen Evolution hatten es weder Tiere noch Menschen nötig, ihre Augen an die obigen Raffinessen anzupassen. Stets war $c$ so gut wie unendlich. Licht–Laufzeiten waren stets $\infty$ kurz. Und es gab wenig Grund, für Strahlen von Wasserpistolen besondere Sensorien zu entwickeln. Soll nun das Sehhirn den Moment nehmen, in dem der Radkranz im Fadenkreuz liegt, oder warten bis Lenker und Rücklicht symmetrisch liegen? (Das letztere ist richtig, wie wir oben gesehen haben.)

Bei den Assoziationen um Lenker, Radkranz, Rücklicht, Sehnerv und Darwinsche Auslese geriet Mister Tompkins in einen alptraumartigen Zustand. Er wachte schweißgebadet auf.

hschulz@itp.uni-hannover.de

[1] Hat Tompkins beide Augen auf, so kann er Entfernungen abschätzen und wird alle Signal–Ausgangspunkte als Punkte auf der $x$–Achse identifizieren. Hier widersprechen wir Sexls Kommentar im Gamov–Buch, wonach sich das Rad drehen würde (der Gepäckträger erscheint lediglich rhombisch verzerrt) oder (noch schlimmer) wonach die Längenkontraktion gar nicht zu sehen sei. Tompkins sieht $2a$! — nicht $2a'$.