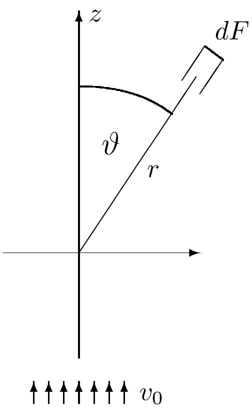
Hannover, 8. 2. 2004



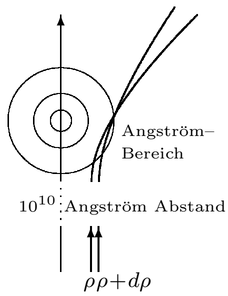
Streuquerschnitt

Einem Strahl nicht–wechselwirkender Teilchen (m , v_0) steht am Ursprung ein Streuzentrum im Wege. Es ist mit seiner Angström–Ausdehnung im links skizzierten Meterbereich nicht sichtbar. Strahl und Zentrum definieren eine Symmetrieachse, oBdA die z–Achse. Falls das streuende Potential $V(r)$ kugelsymmetrisch ist (es sei so), hat der Vorgang achsiale Symmetrie um die z–Achse. Pro Zeit werden einige Teilchen in einem um r entfernten Zählrohr (Fläche dF) bei Kugelkoordinate ϑ registriert.

Der Reproduzierbarkeit wegen beziehen die Experimentatoren diese Anzahl ($=: \#_{\text{aus}}$) auf den Raumwinkel $d\Omega = dF/r^2$ und auf die (ebenfalls gemessene) Stromdichte des einfallenden Strahls, bezeichnen das Resultat zum Beispiel mit $\sigma(\vartheta)$ und sagen „differentieller Streuquerschnitt“ dazu (weil σ Dimension Fläche hat) :

$$\frac{\#_{\text{aus}}}{\text{Zeit und } d\Omega} = i_{\text{aus}} \quad , \quad \frac{\#_{\text{ein}}}{\text{Zeit und Fläche}} = j_{\text{ein}} \quad , \quad \sigma(\vartheta) \; = \; \frac{i_{\text{aus}}}{j_{\text{ein}}} \quad . \tag{1}$$

So mißt man nicht nur, sondern es ist d i e s e Definition, welche sich zwanglos auf Q. (Wahrsch.stromdichte) und ED ($\vec{\jmath}$ $=$Poynting-V.) überträgt. Übrigens : $i_{\text{aus}} \; = \; r^2 j_{\text{aus}}$. Die leider recht übliche Notation „$\frac{d\sigma}{d\Omega}$“ halten wir für ungeschickt, weil sie den Bezug zur obigen Experimentalphysik verliert und eben auch den zu Q. und ED.



Erst wenn σ ausgerechnet werden soll, setzt man $\#_{\text{aus}}$ gleich $\#_{\text{ein}}$, um die #'s kürzen zu können. Natürlich muß nun $\#_{\text{ein}}$ (pro Zeit) genau die Teilchen erfassen, welche später auf der r–Kugel–Oberfläche in $dF = [\, 2\pi r \sin(\vartheta)\,] \cdot [\, r d\vartheta\,]$ (pro Zeit) eintreffen werden. Es sind die Teilchen, die weit unten mit ihrem Stoßparamter ρ in einem bestimmten Intervall $d\rho$ lagen :

$$\sigma(\vartheta) = \frac{\#}{\text{Zeit} \cdot 2\pi \, \sin(\vartheta)\, d\vartheta} \;\; \frac{\text{Zeit} \cdot 2\pi\rho \, |d\rho|}{\#} \;\; = \;\; \frac{\rho(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \, |\, \rho'(\vartheta)\, | \quad . \tag{2}$$

Die Betragstriche sorgen für positives σ auch dann, wenn bei wachsendem ϑ der Stoßparameter zu verkleinern ist. Gegenstand konkreter Rechnungen ist es, $\rho(\vartheta)$ zu erhalten.

Totaler Streuquerschnitt :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}} \; &= \; \frac{\text{gesamte Anzahl gestreuter Teilchen / Zeit}}{j_{\text{ein}}} \; = \; \frac{\int d\Omega \; i_{\text{aus}}}{j_{\text{ein}}} \; = \int d\Omega \; \sigma(\vartheta) \\ &= \; 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \; \sin(\vartheta)\, \sigma(\vartheta) \;\; = \;\; \left| \, 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \; \rho(\vartheta)\, \rho'(\vartheta) \, \right| \\ &= \; \pi \left| \, \rho^2(\vartheta{=}\pi) - \rho^2(\vartheta{=}0) \, \right| \quad (\text{ sofern } \rho(\vartheta) \text{ einwertig ist}) \;\; . \end{aligned} \tag{3}$$

Für eine harte Kugel (R) ist $\rho(\pi) = 0$ und $\rho(0) = R$ und folglich σ_{total} gleich der Äquator–Kreisfläche πR^2 . Übung : Zeige, daß bei harter Kugel $\sigma(\vartheta) = R^2/4 = \text{const}_\vartheta$ ist.

Rutherford : Zu $V(r)$ führen bekanntlich $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}$ und $\dot{\varphi} = L/(mr^2)$ via $\varphi'^{\,r} = \dot{\varphi}/\dot{r}$ zur Bahnkurve : $\chi := \varphi(\infty) - \varphi(r_0) = \int_{r_0}^\infty \ldots$. Und mit $\vartheta = \pi - 2\chi$, $L = m\underset{\uparrow}{\rho}\, v_0$, $E = mv_0^2/2$, $V(r) = \alpha/r$ und so einiger Integrier–Arbeit ergibt sich am Ende

$$\sigma(\vartheta) \;\; = \;\; \left(\frac{\alpha}{2mv_0} \right)^2 \; \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} \quad \rightarrow \;\; \sim \; \frac{1}{\vartheta^4} \;\; \text{bei } \vartheta \rightarrow 0 \;\; , \tag{4}$$

woraus man um 1920 auf die Fast–Punktförmigkeit der Kerne im Atom schließen konnte.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)