Die Invarianz

der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen unter Punkttransformationen

Wir sind Newtonisch aufgewachsen. Wir suchen einen Weg, der uns sanft zur Lagrangeschen Mechanik hinführt. Solche Hinwege in höhere Strukturen sind wertvoll, *für uns* (Menschen) nämlich.

Wenn ein Potential $V(\vec{r})$ existiert (*wenn* !$\not\downarrow$), dann lautet Newtons Bewegungsgleichung bekanntlich $m\dot{\vec{v}} = -\nabla V$, oder in 1D schlicht $m\dot{v} = -\partial_x V(x)$. Bei dem folgenden Spielchen werden, sobald ∂ auftaucht, $\dot{x}$, x und t als drei unabhängige Variable angesehen. d_t hingegen „erinnert" sich wieder der in x oder $\dot{x}$ versteckten t–Abhängigkeit. Ist also $q(x,t)$ irgendeine Funktion von x und t, so gilt $\dot{q} := d_t q = \dot{x}\,\partial_x q(x,t) + \partial_t q(x,t)$ (ein übersetzter Punkt meint also die „totale" Zeitableitung). Nach diesen Verabredungen können wir Newton (in 1D und für ein Teilchen) auch schreiben als

$$d_t\,\partial_{\dot{x}}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 \qquad\qquad\right] \;=\; \partial_x\left[\qquad\quad - V(x)\right] \tag{1}$$

$$\text{oder}\qquad d_t\,\partial_{\dot{x}}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right] \;=\; \partial_x\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right]\quad , \tag{2}$$

denn der Leerraum in den eckigen Klammern hat sich nur mit Termen gefüllt, deren anschließende Differentiation Null ergibt. Mit der Definition $L := L(\dot{x},x) := T - V$ ist also

$$\Big[\,d_t\,\partial_{\dot{x}} - \partial_x\Big]\,L \;=\; 0 \tag{3}$$

mit Newton völlig äquivalent : Lagrange *ist* Newton.

Die Verallgemeinerung auf N Teilchen in 3D ist zwanglos möglich: man lese x als Vektor $(x_1, x_2, \,\ldots\,, x_{3N})$, ∂_x und $\partial_{\dot{x}}$ als $3N$–dimensionale Gradienten, $V(x)$ als Gesamtpotential des Systems und natürlich T als Summe der kinetischen Energien der Teilchen. „Und wenn V nicht existiert ?" — dann denke man über Kräfte nach. Sie sind in unserer heimischen Natur fast ausschließlich elektromagnetisch (Erdanziehung als $-\nabla q\phi$ lesbar). Gescheite Einfüllungen bei (1) geben DIE Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ der Mechanik und ihre (DIE) Lagrange–Funktion $L = T - q\phi + q\vec{v}\,\vec{A}$. Hierzu gibt es ein separates Sonderblatt.

Mit Blick auf ein konkretes Problem mögen nicht–kartesische Koordinaten $q = q(x,t)$ ($3N$–fach zu lesen) sinnvoll erscheinen. Eindeutigkeit der Zuordnung verlangt, daß im interessierenden Bereich $\partial_x q \neq 0$ bleibt. $3N$–fach gedacht: die Jacobi–Determinante soll nicht verschwinden. Weil wir es nachher für (5) gleich benötigen:

$$\partial_x q \neq 0 \quad , \quad \dot{q} = \dot{x}\,\partial_x q + \partial_t q \quad , \quad d_t\,\partial_x q = \dot{x}\,\partial_x^2 q + \partial_t\partial_x q = \partial_x \dot{q} \quad . \tag{4}$$

Auflösen von $q = q(x,t)$ gibt $x = x(q,t)$. Aber auch $\dot{x} = d_t x(q,t) = \dot{q}\,\partial_q x + \partial_t x$ kann vollständig durch $\dot{q}$, q, t ausgedrückt werden. Also kennt man $\widetilde{L}(\dot{q},q,t) := L\left(\dot{x}(\dot{q},q,t)\,,\,x(q,t)\right)$.

<u>Die Invarianz :</u>

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \left[\,d_t\,\partial_{\dot{x}} - \partial_x\right]\,L(\dot{x},x) = \left[\,d_t\,\partial_{\dot{x}} - \partial_x\right]\,\widetilde{L}(\dot{q},q,t) \\
&=\; d_t\left(\partial_{\dot{x}}\dot{q}\right)\,\partial_{\dot{q}}\widetilde{L} - \left(\partial_x\dot{q}\right)\,\partial_{\dot{q}}\widetilde{L} - \left(\partial_x q\right)\,\partial_q\widetilde{L} \quad . \quad (4)\ : \\
&=\; d_t\left(\partial_x q\right)\,\partial_{\dot{q}}\widetilde{L} - \left(d_t\,\partial_x q\right)\,\partial_{\dot{q}}\widetilde{L} - \left(\partial_x q\right)\,\partial_q\widetilde{L} \\
&=\; \left(\partial_x q\right)\,\Big[\,d_t\,\partial_{\dot{q}} - \partial_q\Big]\,\widetilde{L} \qquad \curvearrowright \qquad \Big[\,d_t\,\partial_{\dot{q}} - \partial_q\Big]\,\widetilde{L} \;=\; 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5}$$

Viel wichtiger als die nun bequeme Behandlung bewegungsbeschränkter Systeme ist, daß (5) auf eine höhere Struktur hinweist ($\delta S = 0$), welche dann (deutlicher) die Wahl geeigneter $q(x,t)$ als nur noch schnödes Menschenwerk ausweist. Damit haben wir einen Weg z u r „Zahl der Welt" $S = \int_1^2 dt\ L(\dot{q},q,t)$ skizziert. Landau–Lifschitz Band 1 ist böse. *Ihm* ist (5) von vornherein bereits sonnenklar. Jedoch, kaltherzig in höhere Strukturen „hinein zu springen", das verletzt die Einheit der Physik.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)