Elektrodynamik SS 1991
Mechanik WS 1995 / 96

Geladenes Teilchen in $\vec{E}\,,\ \vec{B}$

Dies ist ein Problem der Mechanik: $m\ddot{\vec r} = q\,(\vec E + \vec v \times \vec B)$. Innerhalb der elektromagnetisch–mechanischen Welt allerdings das einzige. Die zugehörige Lagrange–Funktion hat somit den Rang eines *First Principle* (oder eines Teiles eines solchen). Im nicht–relativistischen Grenzfall lautet sie

$$L = \frac{m}{2}\vec v^{\,2} - q\,\phi + q\,\vec v\,\vec A \qquad (\mathrm{E}\,.\,1)$$

(einzige relativistische Modifikation: $\frac{m}{2}\vec v^{\,2} \to -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$). Um diese Behauptung nachzuprüfen, stellen wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen $d_t(\nabla_v L) = \nabla_r L$ auf (q_i : $\vec r$; $\dot{\vec r} =: \vec v$) und rechnen aus:

$$\begin{aligned}
d_t(m\vec v + q\,\vec A) &= -q\nabla\phi + q\,\overset{\downarrow}{\nabla}\,(\vec v\,\overset{\downarrow}{\vec A}) \\
m\dot{\vec v} + q\,(\vec v\nabla)\,\vec A + q\,\dot{\vec A} &= \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ d.h.} \\
m\dot{\vec v} &= q\,(-\nabla\phi - \dot{\vec A}) + q\,[\overset{\downarrow}{\nabla}\,(\vec v\,\overset{\downarrow}{\vec A}) - (\vec v\nabla)\,\vec A] \quad , \quad [\quad] = \vec v \times (\nabla \times \vec A) \\
&= q\,(\vec E + \vec v \times \vec B) \qquad , \text{ qed .}
\end{aligned}$$

Obacht: in obiger Rechnung (wie auch sonst in der Elektrodynamik) ist mit $\dot{\vec A} = \partial_t\,\vec A\,(\vec r, t)$ die partielle Ableitung gemeint; $\vec A$ ist Feld (ebenso χ in der nachfolgenden Passage) und nicht Koordinate eines Teilchens.

Geht man per $\phi \to \phi - \dot\chi$, $\vec A \to \vec A + \nabla\chi$ zu anderen Potentialen über, dann reflektiert $L \to L + q\dot\chi + q\dot{\vec r}\,\nabla\chi = L + q d_t\chi$ die Eichinvarianz der Realität.

Mit den verallgemeinerten Impulsen $\vec p_V \; := \; \nabla_v L = m\vec v + q\,\vec A$ können wir die Hamilton–Funktion $H \; := \; [\,\vec v\,\vec p_V - L\,]_{\text{eliminiere } \vec v \text{ zugunsten von } \vec p_V\,!}$ bilden, d.h. $\vec v = \frac{1}{m}(\vec p_V - q\,\vec A)$ in $[\quad] = m\vec v^{\,2} + q\,\vec v\,\vec A - \frac12 m\vec v^{\,2} + q\,\phi - q\,\vec v\,\vec A = \frac12 m\vec v^{\,2} + q\phi$ einsetzen:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec p_V - q\,\vec A\right)^2 + q\,\phi \quad . \qquad (\mathrm{E}\,.\,2)$$

Es ist *diese* Hamilton–Funktion, welche in der Quantenmechanik benötigt wird, und zwar in Kombination mit der Regel, wonach der kartesische (!) verallgemeinerte Impuls (nämlich $\vec p_V$) durch $\frac{\hbar}{i}\nabla =: \vec p$ zu ersetzen ist. Mehr noch: die gesamte nicht–relativistische Quantenmechanik (Spin ist relativistischer Effekt) kommt aus mit einem einzigen Hamilton–Operator, welcher ? — (E . 2) !.

Mußten wir L "raten" und sodann als "Behauptung" nachprüfen ? Keineswegs. Aus $-m\dot{\vec v} + q\,\vec E + q\vec v \times \vec B = 0$ folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(-\vec\eta\cdot m\ddot{\vec r} - q\vec\eta\,\nabla\phi - q\vec\eta\,\dot{\vec A} + q\,\vec\eta\cdot[\overset{\downarrow}{\nabla}\,(\vec v\,\overset{\downarrow}{\vec A})] - q\,\vec\eta\cdot[(\vec v\nabla)\,\vec A]\right) = 0 \quad ,$$

und mit $\dot{\vec A} = d_t\,\vec A - (\vec v\nabla)\,\vec A$ sowie den partiellen Integrationen $\vec\eta\,\ddot{\vec r} \to -\dot{\vec\eta}\,\dot{\vec r}$ und $\vec\eta\, d_t\,\vec A \to -\dot{\vec\eta}\,\vec A$ entsteht $\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\delta(\frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2}) - q\delta\phi + q\delta(\vec v\,\vec A)\right) = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$, qed .

(hschulz@itp.uni-hannover.de)