Geladenes Teilchen in $\vec{E}\,,\ \vec{B}$

Dies ist ein Problem der Mechanik: $m\ddot{\vec{r}} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Innerhalb der elektromagnetisch–mechanischen Welt allerdings das einzige. Die zugehörige Lagrange–Funktion hat somit den Rang eines *First Principle* (oder eines Teiles eines solchen). Im nicht–relativistischen Grenzfall lautet sie

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2} - q\,\phi + q\,\vec{v}\,\vec{A} \tag{E.1}$$

(einzige relativistische Modifikation: $\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2} \to -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$). Um diese Behauptung nachzuprüfen, stellen wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen $d_t(\nabla_v L) = \nabla_r L$ auf ($q_i\ :\ \vec{r}\ ;\ \dot{\vec{r}} =: \vec{v}$) und rechnen aus:

$$\begin{aligned} d_t(m\vec{v} + q\,\vec{A}) &= -q\nabla\phi + q\,\overset{\Downarrow}{\nabla}\,(\vec{v}\,\overset{\Downarrow}{\vec{A}}) \\ m\dot{\vec{v}} + q\,(\vec{v}\nabla)\,\vec{A} + q\,\dot{\vec{A}} &= \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ d.h.} \\ m\dot{\vec{v}} &= q\,(-\nabla\phi - \dot{\vec{A}}) + q\,[\overset{\Downarrow}{\nabla}\,(\vec{v}\,\overset{\Downarrow}{\vec{A}}) - (\vec{v}\nabla)\,\vec{A}] \quad , \quad [\quad] = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad , \text{qed} . \end{aligned}$$

Obacht: in obiger Rechnung (wie auch sonst in der Elektrodynamik) ist mit $\dot{\vec{A}} = \partial_t\,\vec{A}\,(\vec{r}\,,t)$ die partielle Ableitung gemeint; $\vec{A}$ ist Feld (ebenso χ in der nachfolgenden Passage) und nicht Koordinate eines Teilchens.

Geht man per $\phi \to \phi - \dot{\chi}$, $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi$ zu anderen Potentialen über, dann reflektiert $L \to L + q\dot{\chi} + q\dot{\vec{r}}\,\nabla\chi = L + qd_t\chi$ die Eichinvarianz der Realität.

Mit den verallgemeinerten Impulsen $\vec{p}_V := \nabla_v L = m\vec{v} + q\,\vec{A}$ können wir die Hamilton–Funktion $H := \left[\,\vec{v}\,\vec{p}_V - L\,\right]_{\text{eliminiere } \vec{v} \text{ zugunsten von } \vec{p}_V\,!}$ bilden, d.h. $\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p}_V - q\,\vec{A})$ in $[\quad] = m\vec{v}^{\,2} + q\,\vec{v}\,\vec{A} - \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + q\,\phi - q\,\vec{v}\,\vec{A} = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + q\phi$ einsetzen:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_V - q\,\vec{A}\right)^2 + q\,\phi \quad . \tag{E.2}$$

Es ist *diese* Hamilton–Funktion, welche in der Quantenmechanik benötigt wird, und zwar in Kombination mit der Regel, wonach der kartesische (!) verallgemeinerte Impuls (nämlich $\vec{p}_V$) durch $\frac{\hbar}{i}\nabla =: \vec{p}$ zu ersetzen ist. Mehr noch: die gesamte nicht–relativistische Quantenmechanik (Spin ist relativistischer Effekt) kommt aus mit einem einzigen Hamilton–Operator, welcher ? — (E . 2) !.

Mußten wir L "raten" und sodann als "Behauptung" nachprüfen ? Keineswegs. Aus $-m\dot{\vec{v}} + q\,\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$ folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(-\vec{\eta}\cdot m\ddot{\vec{r}} - q\vec{\eta}\nabla\phi - q\vec{\eta}\,\dot{\vec{A}} + q\,\vec{\eta}\cdot[\overset{\Downarrow}{\nabla}\,(\vec{v}\,\overset{\Downarrow}{\vec{A}})] - q\,\vec{\eta}\cdot[(\vec{v}\nabla)\,\vec{A}]\right) = 0 \quad ,$$

und mit $\dot{\vec{A}} = d_t\,\vec{A} - (\vec{v}\nabla)\,\vec{A}$ sowie den partiellen Integrationen $\vec{\eta}\,\ddot{\vec{r}} \to -\dot{\vec{\eta}}\,\dot{\vec{r}}$ und $\vec{\eta}\,d_t\,\vec{A} \to -\dot{\vec{\eta}}\,\vec{A}$ entsteht $\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\delta(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}) - q\delta\phi + q\delta(\vec{v}\,\vec{A})\right) = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$, qed .

(hschulz@itp.uni-hannover.de)