Euler's Winkel und die SO(3)

Ein so überschaubares Objekt wie der starre Körper mit nur drei (plus drei trivialen) Freiheitsgraden sollte auch eine überschaubare Behandlung erfahren. Aber leicht divergieren Philosophie und Bezeichnungen. Man muß sich dagegenstemmen.

Alle wesentlichen Aussagen kann man erhalten, ohne je eine Drehmatrix explizit gemacht zu haben:

$$\vec v = \vec\omega \times \vec r \quad \Rightarrow \quad \vec L = \sum m\vec r \times (\vec\omega \times \vec r) := \mathrm{I}\,\vec\omega \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{rot}} = \sum \frac{1}{2} m\,(\vec\omega \times \vec r)\,\vec v \;=\; \frac{1}{2}\vec\omega\,\mathrm{I}\,\vec\omega \tag{1}$$

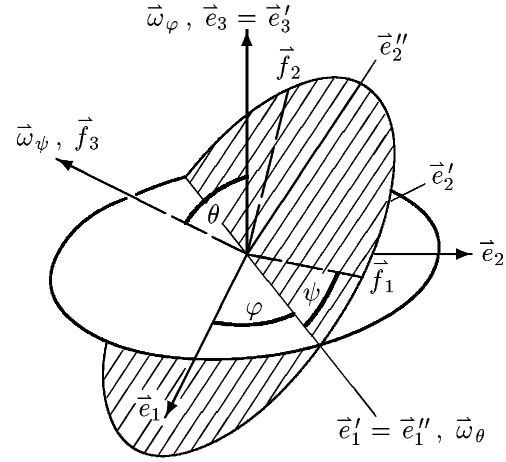
Die Lagrange–Funktion ist somit

$$L \;=\; \frac{1}{2} M\,\dot{\vec R}^2 \;+\; \frac{1}{2}\vec\omega\,\mathrm{I}\,\vec\omega \;-\; V \;. \tag{2}$$

Man gehe nicht voreilig in ein körperfestes System: bei Festlöten einer Achse (abseits Schwerpunkt) ist diese im Laborsystem gegeben. Andererseits, da T_{rot} eine Invariante unter Drehungen ist und als körperfestes Dreibein die Hauptachsen wählbar sind, wartet

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_1\,\omega_1'^{\,2} + \mathrm{I}_2\,\omega_2'^{\,2} + \mathrm{I}_3\,\omega_3'^{\,2}\right) \tag{3}$$

nur noch auf Angabe der Projektionen $\omega_j' = \vec\omega\,\vec f_j$.



Anhand seiner Figur, welche die Euler–Winkel φ, θ und ψ definiert, kann nun Landau [LL §35] *sehen*, daß

$$\vec\omega' = \Big(\,\dot\varphi\, s_\theta s_\psi + \dot\theta\, c_\psi \;,\; \dot\varphi\, s_\theta c_\psi - \dot\theta\, s_\psi \;,\; \dot\varphi\, c_\theta + \dot\psi\,\Big) \;. \tag{4}$$

Er hat dazu drei Winkelgeschwindigkeits-Vektoren addiert, jene zu festgehaltenen jeweils anderen zwei Winkeln. Der kräftefreie symmetrische Kreisel bekommt mit (4) die Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}\mathrm{I}_1\left(\dot\varphi^2 s_\theta^2 + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3\left(\dot\varphi\, c_\theta + \dot\psi\right)^2 \;. \tag{5}$$

Hat jemand ein Starrkörper–Problem gelöst, d.h. die drei Euler–Winkel als Funktionen der Zeit erhalten, so will er die Bewegung des Körpers nachvollziehen, etwa als Computergrafik. Er braucht dazu die drei $\vec f$–Vektoren als Funktionen der Zeit. Diese stehen als Zeilen in der Drehmatrix D [Goldstein, Gl. (4–46)], welche passiv (!) vom Laborsystem ($\vec e_j$) zum $\vec f$–System vermittelt:

$$D = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\psi - s_\varphi c_\theta s_\psi & s_\varphi c_\psi + c_\varphi c_\theta s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\psi - s_\varphi c_\theta c_\psi & -s_\varphi s_\psi + c_\varphi c_\theta c_\psi & s_\theta c_\psi \\ s_\varphi s_\theta & -c_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Mittels (6) kann man den Laborsystem–Drehimpuls erhalten, nämlich per $\vec L = \mathrm{I}\,\vec\omega = D^T \mathrm{I}'\,\vec\omega'$. Zu speziell $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$ (symmetrischer Kreisel) folgt:

$$L_3 = \mathrm{I}_1\,\dot\varphi\, s_\theta^2 + \mathrm{I}_3\, c_\theta\left(\dot\psi + \dot\varphi\, c_\theta\right) \;,$$

$$L_1 = \mathrm{I}_1\left[\dot\theta\, c_\varphi - \dot\varphi\, s_\varphi s_\theta c_\theta\right] + \mathrm{I}_3\, s_\varphi s_\theta\left(\dot\psi + \dot\varphi\, c_\theta\right) \;,\quad L_2 = \mathrm{I}_1\left[\dot\theta\, s_\varphi + \dot\varphi\, c_\varphi s_\theta c_\theta\right] - \mathrm{I}_3\, c_\varphi s_\theta\left(\dot\psi + \dot\varphi\, c_\theta\right) \;. \tag{7}$$

$\vec\omega'$ muß mit einer infinitesimalen Drehung D^{inf} während dt zu tun haben:

$$D(t+dt) = D^{\mathrm{inf}} D(t) \qquad \text{mit (Behauptung)} \qquad D^{\mathrm{inf}} = 1 - dt\,\left(\vec\omega'\times\,\right) \;. \tag{8}$$

Stimmt (8), so folgt

$$\dot D\, D^T = -D\dot D^T = -\left(\vec\omega'\times\,\right) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \omega_3' & -\omega_2' \\ -\omega_3' & 0 & \omega_1' \\ \omega_2' & -\omega_1' & 0 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Aus z.B. $\omega_1' = (\dot D\, D^T)_{23} = \dot D_{21}\, D_{31} + \dot D_{22}\, D_{32} + \dot D_{23}\, D_{33}$ erhält man tatsächlich $\dot\varphi\, s_\theta s_\psi + \dot\theta\, c_\psi$, vgl. (4).

„Infinitesimale Drehung" möge auf den Term linear im Winkel beschränken. Also ist z.B.

$$D^{\mathrm{inf}}_{z,d\varphi} = 1 + d\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 - d\varphi\left(\vec e_3\times\,\right) \qquad \Rightarrow \qquad D^{\mathrm{inf}}_{\vec e,d\varphi} = 1 - d\varphi\left(\vec e\times\,\right) \;, \tag{10}$$

wobei die Verallgemeinerung rechts aufgrund der rein vektoriellen Formulierung links möglich wurde. Nur noch der Gedanke $d\varphi\,\vec e = dt\,\vec\omega'$ ist nun nötig, um die Behauptung (8) einzusehen.

Drehungen sind Elemente einer kompakten Lie–Gruppe, der SO(3) (S: special, O: orthogonal, 3 real dimensions). $(\vec e_1\times\,)$, $(\vec e_2\times\,)$ und $(\vec e_3\times\,)$ sind ihre *Generatoren.* Und sie „generieren" tatsächlich, z.B.:

$$\left(1 - \frac{\varphi}{N}\vec e_3\times\right)^N \to e^{-\varphi\,\vec e_3\times} = \mathrm{ch}\left(\varphi\vec e_3\times\right) - \mathrm{sh}\left(\varphi\vec e_3\times\right) = \begin{pmatrix} c_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sin(\varphi)\,\vec e_3\times = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

Die Lie–Algebra *schließt*: $(\vec e_1\times\,)(\vec e_2\times\,) - (\vec e_2\times\,)(\vec e_1\times\,) \;=\; \vec e_2\circ\vec e_1 - \vec e_1\circ\vec e_2 \;=\; \vec e_3\times$. Die Guppe SO(N) hat $N(N-1)/2$ Generatoren. Numeriert man sie mit einem Index–Paar $[i,j]$ $(i<j)$, so hat der i,j–te Generator das k,ℓ–te Matrixelement $\delta_{i\ell}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{j\ell}$.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)