Universität Hannover
25. Januar 1997

freiwillige **KLAUSUR**

Mechanik WS 96 / 97

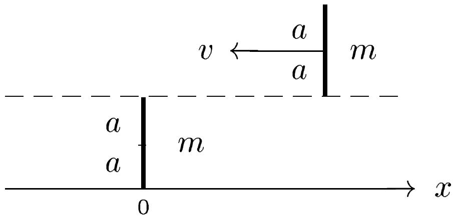
---

1) Ein geladenes Teilchen $(m,\, q)$ erlebt die Reibungskraft $-m\gamma\vec{v}$ und ein Magnetfeld $\vec{B} = (\,0\,,\,0\,,\,B(t)\,)$ mit genau einer solchen Stärke und zeitlichen Abnahme, daß m auf einer Kreisbahn bleibt: $\vec{r} = R(c, s, 0)\,,\ c := \cos(f(t))\,,\ s := \sin(f(t))\,,\ f(0) = 0\,,$ $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)\ .$ $\quad f(t) = ?\ ,\quad B(t) = ?$ (4)

2) $\dot{v} = k\,[\,\delta(t) - \delta(t - t_0)\,]\quad ,\ k = \mathrm{const}\ ,\ t_0 > 0\ ,\ v(\,t < 0\,) \equiv 0\ .$
(a) $v(t)$ per Malen ! (Skizze bitte mit allen relevanten Daten versehen) (b) Wie ergibt sich die Lösung der Dgl mit Hilfe der Greenschen Funktion $G(t)$ $(=?)$ des Operators ∂_t ? (c) Welche Gleichung erfüllt die Fourier–Transformierte $\widetilde{v}(\omega)$ der Funktion $v(t)$? Welches Integral (über $\widetilde{v}$) liefert $v(t)$? Setzen wir hierin z.B. $t = t_0/2$, so folgt (da wir ja das Resultat $v(t_0/2)$ schon kennen) der Wert eines bestimmten Integrals für die Formelsammlung, nämlich ? (Zugegeben, Bronstein kennt es schon.) (5)

3) Zwei Zeitmittel : $\quad \overline{\sin^4(\omega t)}\ = \ ? \qquad \overline{\cos^3(\omega t)}\ = \ ?$ (2)

4) Ein Stab $(m,\, I,$ Länge $2a$, Schwerpkt. in Höhe $a)$ steht ruhig und aufrecht am Ursprung und ist dort drehbar festgehakt. Ein zweiter, ebensolcher kommt aufrecht mit v von rechts geflogen. In dem Moment, wo sein unteres Ende den ersten Stab berührt, möge sich ein starrer gerader Stab der Länge $4a$ bilden (Ursprung = Achse).



Welches Trägheitsmoment I_{ges} hat der Neue um seinen Schwerpunkt ? Welche Geschw. u hat der neue Schw.pkt. unmittelbar nach Stoß ? Welche Energie ΔE wummert im $4a$-Stab ? Probe : Wenn die Masse beider Stäbe in Portionen $m/2$ an ihren Enden konzentriert war ($\Rightarrow$ $I = ?\,, I_{\mathrm{ges}} = ?$) sollte sich $u = v/2$ ergeben. Ist es so ? Weshalb erwarten wir $\Delta E = mv^2/8$ in diesem Falle ? Liefert dies auch Ihre ΔE-Formel ? Der 'Besen' fällt nun um (Start–u gegeben). Mit welcher Geschwindigkeit $\overline{v}$ schlägt sein Schwerpunkt bei $x = -2a$ auf ? (8)

5) Zum Pendel $(m_2,\, \ell)$, dessen massive (m_1) Aufhängung auf der x-Achse gleitet, hatten wir einmal $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x} + \ell\dot{\varphi}\right)^2 + m_2\,(c-1)\,\dot{x}\ell\dot{\varphi} + m_2 g\ell c\ \ ,\ \ c := \cos(\varphi)$, erhalten. Nun vereinfachen wir hinsichtlich kleiner Schwingungen, führen $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = (\,x\,,\, x + \ell\varphi\,)$ ein, bringen L auf Normalform ($M = ?\ ,\ \boldsymbol{K} = ?$), bilden $H = M^{-1/2}\,\boldsymbol{K}\,M^{-1/2}$ (Abkürzung : $\sqrt{m_1/m_2} =: \alpha$) und ermitteln die beiden Eigenfrequenzen ω^2 des Systems. (4)

6) $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 q^{-4} - \frac{1}{2}\omega^2 q^{-2}\ .\ \ \delta L = ?$ Erst jetzt möge $\eta(1) = \eta(2) = 0$ ausgenutzt werden dürfen, um aus $\delta S = 0$ die Bewegungsgleichung (= ?) zu erhalten. Unabhängige andere Frage : Welche neue Lagrange–Funktion ergibt sich aus obigem L unter der Punkttransformation $q = x^\lambda$? Zu welchem λ-Wert wird die kinetische Energie besonders einfach ? (4)

7) Der Letzte einer Schar Zugvögel (Länge aus parallel fliegendem Flugzeug mit ℓ' angegeben, unterwegs in x-Richtung) löst bei Koinzidenz mit Ursprung einen Lichtblitz aus, welcher das Leittier bei $\ell = 2\ell'$ trifft. Wie schnell sind die Vögel, $\beta = ?$ (2)

8) Wenn für Leute in Σ' ein Teilchen mit $\vec{w}' = (-w, 0, w_3')$ fliegt und für Σ–Leute mit $\vec{w} = (+w, 0, w_3)$, dann (so hatten wir Lewis und Tolman geglaubt) muß wohl auch $w_3 = w_3'$ gelten. Wir weisen nun durch explizite Rechnung nach, daß dem so ist. (3)

9) $p :=$ 4–Impuls eines Teilchen , $\Lambda :=$ allg.Lor.Transf. : $\quad (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, p_\nu\, \eta^{\mu\rho}\, \Lambda_\rho{}^\sigma\, p_\sigma\ = \ ?$ (1)

---

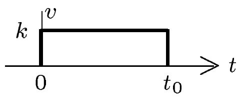
limit : 9 Punkte $\qquad \Sigma :\ 33$

(hschulz@itp.uni-hannover.de)

Klausur – **LÖSUNGEN**

1) $\dot{\vec{v}} = -\gamma\vec{v} + (q/m)\vec{v}\times(0,0,B(t))$, $\vec{v} = R\dot{f}(-s,c,0)$: $R\ddot{f}(-s,c,0) - R\dot{f}^2(c,s,0) = -\gamma R\dot{f}(-s,c,0) + \frac{q}{m}B(t)R\dot{f}(c,s,0) \;\Rightarrow\; B(t) = -\frac{m}{q}\dot{f}$, $\ddot{f} = -\gamma\dot{f}$, $\dot{f} = Ae^{-\gamma t}$. $\vec{v}(0) = R\dot{f}(0)(0,1,0)$, $\dot{f}(0) = v_0/R = A$, $B(t) = -\left(mv_0/(qR)\right)e^{-\gamma t}$.

---

2) (a) 

(b) $G = \theta(t)$, $v = \int dt'\theta(t-t')\,k\,[\,\delta(t') - \delta(t'-t_0)\,] = k\,[\,\theta(t) - \theta(t-t_0)\,]$. (c) Wende $\int dt e^{-i\omega t}$ an : $i\omega\tilde{v} = k - ke^{-i\omega t_0}$, $v = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\frac{k}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega t_0}\right)e^{i\omega t}$, $\frac{\pi}{k}v\left(\frac{t_0}{2}\right) = \pi = \int d\omega\frac{\sin(\omega t_0/2)}{\omega}$.

---

3) $s^4 = s^2\left(1-c^2\right) = s^2 - \frac{1}{4}\sin^2(2\omega t)$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Daß $\overline{c^3} = 0$ darf anschaulich klar sein (Flächenkompensation, Malen!) , oder: $\frac{1}{4}\overline{\cos(3\omega t)} + \frac{3}{4}\overline{c} = 0 + 0 = 0$.

---

4) $I_{\text{ges}} = 2\left(I + ma^2\right)$, $L_3^{\text{vor}} = L_3^{\text{nach}}$: $m\cdot 3a\cdot v = 2m\cdot 2a\cdot u + I_{\text{ges}}\omega$, $\omega\cdot 2a = u$, $u = \frac{3}{4}\frac{v}{(1+\ )}$ mit $(1+\ ) := \left(1 + \frac{I_{\text{ges}}}{8ma^2}\right)$, $\Delta E = \frac{m}{2}v^2 - \left\{\frac{2m}{2}u^2 + \frac{1}{2}I_{\text{ges}}\left(\frac{u}{2a}\right)^2\right\} = \frac{m}{2}v^2\left[1 - \frac{9}{8}\frac{1}{(1+\ )}\right]$, Probe: $I = ma^2$, $I_{\text{ges}} = 4ma^2$, $(1+\ ) = \frac{3}{2}$, $u = \frac{3}{4}\frac{2v}{3} = \frac{v}{2}$. … weil Klebestoß $\frac{m}{2}$ (mit v) auf ruhendes $\frac{m}{2}$ vorliegt und $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{mv^2}{8}$ verbrät. Obiges ΔE wird in der Tat $\frac{m}{2}v^2\left[1 - \frac{9}{8}\frac{2}{3}\right] = \frac{mv^2}{8}$. E-Satz: $\{\text{s.o.}\} + 4mga = mu^2(1+\ ) + 4mga = m\overline{v}^2(1+\ )$, $\overline{v}^2 = u^2 + 4ga/(1+\ )$

---

5) $L = \frac{1}{2}m_1\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}m_2\frac{g}{\ell}\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2$, $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$, $K = m_2\frac{g}{\ell}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$H = \frac{gm_2}{\ell m_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{gm_2}{\ell m_1}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$, $(1-\lambda)(\alpha^2 - \lambda) - \alpha^2 = 0$,

$\lambda = 0$ bzw. $\lambda = 1 + \alpha^2$, $\omega^2 = 0$ bzw. $\omega^2 = \frac{g}{\ell}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$.

---

6) $\delta L = \dot{q}\dot{\eta}q^{-4} - 2\dot{q}^2q^{-5}\eta + \omega^2q^{-3}\eta$, $\delta S = \int_1^2 dt\,\eta\left[-\left(\dot{q}q^{-4}\right)^{\bullet} - 2\dot{q}^2q^{-5} + \omega^2q^{-3}\right]$, $\ddot{q} = 2\dot{q}^2/q + \omega^2 q$. $\dot{q} = \lambda x^{\lambda-1}\dot{x}$, $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2\lambda^2x^{-2-2\lambda}$, $\lambda = -1$, $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2x^2$.

---

7) Ankunfts–Ereignis: $ct = c\cdot(\ell/c) = \ell$, $ct' = \ell'$, $\begin{pmatrix} \ell' \\ \ell' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell \\ \ell \end{pmatrix}$, $\ell' = \gamma(1-\beta)\ell$, $\gamma(1-\beta) = \frac{1}{2}$, $4(1-\beta) = 1+\beta$, $\beta = 3/5$.

---

8) Geschw.Transf.: $(w,0,w_3) = \dfrac{1}{1+\beta(-w)/c)}(-w+v,0,w_3'/\gamma)$, $x := w/c$, Frage ist, ob $\gamma(1-\beta x) \stackrel{?}{=} 1$. β aus Gleichheit der ersten Komponenten: $x(1-\beta x) = \beta - x$, $\beta = 2x/(1+x^2)$, $\gamma = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 - 4x^2}} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, $\gamma(1-\beta x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}\left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) = 1$.

---

9) Z.B.: $\ldots = \Lambda_\mu{}^\nu p_\nu \Lambda^\mu{}_\sigma p^\sigma = \eta_{\mu\tau}\Lambda^\tau{}_\nu p^\nu p^{\mu\,\prime} = p'_\mu p^{\mu\,\prime} = p_\nu p^\nu$.
Oder: $p_\nu(\Lambda^{-1})^{\nu\,\rho}\Lambda_\rho{}^\sigma p_\sigma = p_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho\Lambda^\rho{}_\sigma p^\sigma = p_\nu p^\nu = p'_\nu p^{\nu\,\prime}$.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)