Der Dopplereffekt des Lichtes folgt aus $k' = \Lambda k$, und dies folgt aus dem Einzeiler

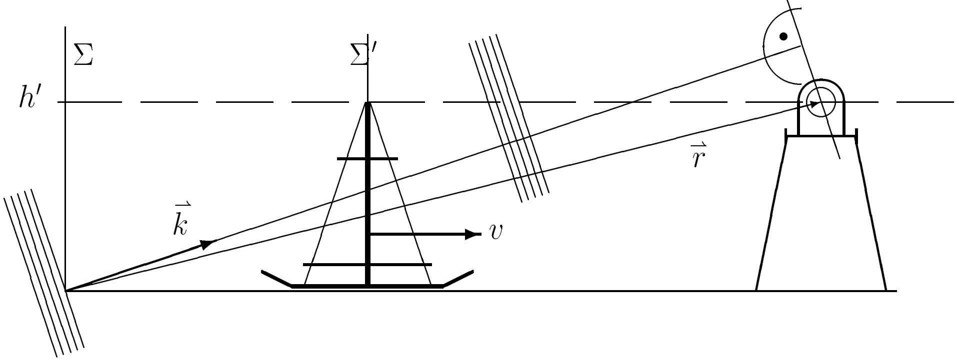
$$kx = k^\mu x_\mu = k^\mu \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho x^{\rho\,\prime} = k^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda_\rho{}^\nu x^{\rho\,\prime} = \left(\Lambda^\rho{}_\mu k^\mu\right)\, x'_\rho \;\stackrel{?}{=}\; k^{\rho\,\prime} x'_\rho = k'x'$$

d.h. aus dem Umstand, daß kx Lorentz–Skalar ist. Und woraus folgt der letztere ? Er läßt sich aus Hut (a) zaubern noch bevor man über Lorentz–Transformation elektromagnetischer Felder genaueres weiß. Ist allerdings Hut (b), nämlich $F' = \Lambda\Lambda F$, bereits im Handel, dann impliziert der Strich am F, daß auch per $x = \Lambda^{-1}x'$ auf Variable x' umzurechnen ist. Σ'–Leute sehen $k' = \Lambda k$. „Umstand" umgangen. Wer Hut (a) bereits hat, kann diesen Gedanken einsparen und $F' = \Lambda\Lambda F$ schlapp als Transformation der Amplituden $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ lesen. Wohl dem, der beide Hüte hat.

Hut (a) kommt daher als ein schönes Gedankenexperiment im *Jackson (Class.ED, 1962, §11.4).* Wir erleichtern es uns hier ein wenig (und reparieren ein Fehlerchen).

Eine Lichtwelle ($\vec{k}$, $\omega = ck$) eilt nach rechts–oben. Ihre Front (=Nullstelle ihrer trigonometrischen Funktion) erreicht den Ursprung zu $t = t' = 0$, wodaselbst gerade zwei Systeme Σ, Σ' koinzidieren. Weit rechts (siehe Skizze) bei $\vec{r}$ sitzt der Σ-Leuchtturmwärter. Er wartet darauf, Nullebenen zu zählen. Bis zum Eintreffen der Front vergeht die Zeit $t_1 = \frac{1}{c}\vec{r}\cdot(\vec{k}/k)$. Aber von nun an wird er $\{2c\Delta t/\lambda\}$ Ebenen in Δt registrieren. $\{a\}$:=kleinste natürliche Zahl$> a$. Wegen $1/\lambda = k/(2\pi) = \omega/(2\pi c)$ sind das zur Zeit $t = t_1 + \Delta t$

$$\left\{\frac{2c\Delta t}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\omega\Delta t}{\pi}\right\} = \left\{\frac{\omega}{\pi}(t - t_1)\right\} = \left\{\frac{\omega}{\pi}\left(t - \frac{\vec{r}\,\vec{k}}{\omega}\right)\right\} = \left\{\frac{\omega t - \vec{k}\,\vec{r}}{\pi}\right\} \quad \text{counts} \quad .$$



In Σ' (boost in x-Richtung) sitzt derweil ein Kapitän im Korb seines Einmasters bei $\vec{r}' = (0, 0, h')$ mit $h' = z$, d.h. gleich hoch wie der leuchtende Kollege. Wenn sich zur Zeit t Käptn und Wärter die Hand reichen (jaja, der Leuchtturm hat einen Erker, welcher über dem Wasser etc.), dann haben sie bis dahin die **gleiche** Anzahl Nullebenen gezählt. Lediglich hat sich der Kapitän die obige Rechnung mit ω', $\vec{k}'$, $\vec{r}'$ und t' aufgezogen. Fazit:

$$\#\,\text{Käptn–counts} \quad = \quad \frac{\omega' t' - \vec{k}'\,\vec{r}'}{\pi} \quad = \quad \frac{\omega t - \vec{k}\,\vec{r}}{\pi} \quad = \quad \#\,\text{Wärter–counts}$$

Die diskretisierende Klammer { } wurde jetzt weggelassen, weil ebensogut Maxima gezählt werden konnten, oder Halbwert–Erreichungen, oder Hundertstel. Das macht die innere Gleichheit „dicht" .

Das wars. Die „Phase" kx der Welle ist ein Lorentz–Skalar. Punkt. Aber wir können ja noch nachschauen (Hut ab), wie sich *Jackson* dazu ausdrückt:

The relativistic Doppler shift formulas can be obtained from the fact that the phase of a plane wave is an invariant under a Lorentz transformation, the reason being that the phase can be associated with mere counting which is independent of coordinate frame. Consider a plane wave of frequency ω and wave vector $\mathbf{k}$ in the reference frame K. An observer at the point P with coordinate $\mathbf{x}$ is equipped to record the number of wave crests which reach him in a certain time. If the wave crest passing the origin at $t = 0$ is the first one which he records (when it reaches him), then at time t he will have counted ....

(hschulz@itp.uni-hannover.de)