# *Dirac–Gleichung* $(i\not{D} - m)\,\psi = 0$

Gewöhnliche Quantenmechanik, $i\hbar\partial_t\,\psi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\,\vec{A})^2 + q\phi\right]\,\psi$ , ist zwar eich– aber ersichtlich nicht Lorentz–invariant. Unter Aufrechterhaltung aller quantenmechanischen Essentials (insbesondere der ersten Ordnung in $\partial_t$, damit bereits $\psi(\vec{r}\,,0)$ alle Information enthält) hat darum Dirac 1928 die allgemeine Linearkombination der $\partial_\mu$–Komponenten aufgeschrieben,

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\,\psi \;=\; 0 \qquad , \quad \not{\partial} := \gamma^\mu\partial_\mu \quad , \quad \partial^\mu := (\,\partial_{ct}\;,\,-\nabla\,) \quad , \qquad (\mathrm{D.1})$$

und die Forderung, ebene Wellen $\exp\left[\,\frac{i}{\hbar}\left(\vec{q}\,\vec{r} - \sqrt{m^2c^4 + q^2c^2}\;t\right)\right]$ möchten diese Gleichung lösen, in Eigenschaften der vier 4×4–Matrizen $\gamma^\mu$ übersetzt:

$$\{\,\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\,\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0 \quad , \quad \left(\gamma^0\gamma^k\right)^\dagger = \gamma^0\gamma^k \quad . \qquad (\mathrm{D.2})$$

Sucht man nach *allen* stationären Lösungen $\psi = e^{-iEt/\hbar}\cdot\ldots$ von (D.1), so darf mit $\ldots = e^{-i\,\vec{q}\,\vec{r}/\hbar}$ gearbeitet und in die per Anwendung von $i\hbar\not{\partial}+mc$ auf (D.1) entstehende *Klein–Gordon–Gleichung* $\left(\hbar^2\partial^2 + m^2c^2\right)\psi = 0$ eingesetzt werden:

$$E \;=\; \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{q}^{\,2}c^2} \quad . \qquad (\mathrm{D.3})$$

Das Vakuum ist „voll" : die Zustände des unteren Hyperbel–Astes sind Pauli–doppelbesetzt. Vielteilchen–Theorie ist unausweichlich. Jedes Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen hat sein Antiteilchen gleicher Masse aber entgegengesetzter Ladung. Massiv thermisch angeregt waren Positronen (entdeckt 1932) damals, als es noch $2mc^2 = 1$ MeV $= k_B\cdot 10^{10}$K warm war. *Es gibt* (April 2002) die folgenden Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\nu_e\;\;\nu_\mu\;\;\nu_\tau$ | 0 | $u\;\;c\;\;t$ | +2/3 |
| $e\;\;\mu\;\;\tau$ | −1 | $d\;\;s\;\;b$ | −1/3 |

In je der vierten Spalte steht ihre Ladung; jedes quark ist seinerseits dreifarbig. (D.4)

Die Ladung der Dirac-Seen (sofern real) ist somit $-3 + 3\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\cdot 3\; =$ Null.

Das Prinzip der lokalen Eichinvarianz (nämlich unter $\psi \to e^{-iq\,\chi/\hbar}\psi$) zwingt zur Aufnahme von Eichfeldern: $\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar}A^\mu =: D^\mu$ $(A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\chi)$. Somit ist $(i\hbar\not{D} - mc)\,\psi = 0$ die Dirac-Gleichung mit Feld. Unter Verwendung der Dirac-Basis

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad (\mathrm{D.5})$$

mit $A^\mu = \left(\,\phi\,,\,c\,\vec{A}\,\right)$ und unter Aufteilen des 4–komponentigen Spinors $\psi$ in obere $(\varphi)$ und untere Komponenten $(\chi)$ nimmt sie die Gestalt

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\partial_t - q\phi - mc^2\right)\varphi &= c\,(\vec{p} - q\,\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\;\chi \\ \left(i\hbar\partial_t - q\phi + mc^2\right)\chi &= c\,(\vec{p} - q\,\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\;\varphi \qquad \text{an}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{D.6})$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall $c \to \infty$ und für den „Alltag" $i\hbar\partial_t = mc^2 + O\left(c^0\right)$ kann die untere Gleichung (D.6) als $\chi = \frac{1}{2mc}(\vec{p} - q\,\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\,\varphi$ in die obere eingesetzt werden. Mittels $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\,(\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot\vec{\sigma}$ und $(\vec{p} - q\,\vec{A})\times(\vec{p} - q\,\vec{A}) = iq\hbar\,\nabla\times\vec{A}$ sowie $\varphi = e^{-imc^2\,t/\hbar}\,\psi$ ergibt sich die *Pauli–Gleichung*

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\,\vec{A})^2 + q\phi - \frac{q}{2m}\vec{B}\cdot\frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}\cdot 2\right]\,\psi \quad . \qquad (\mathrm{D.7})$$

Spin–Bahn–Kopplung bekommt man erst als einen der $1/c^2$–Effekte.

Um die Lorentz–Transformation für Spinoren zu erkunden, ziehe man (D.1) während einer $v$-Reise aus der Tasche, bringe Striche ( n u r ) bei $\partial^\mu$, $\psi$ und am Argument $x$ an $(x' = \Lambda x)$, lasse $\psi' = S(v)\,\psi$ zu und löse folglich $S^{-1}\gamma^\nu S = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu$ . Man erhält

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} -\omega \\ i\varphi\gamma_5 \end{matrix}\right\}\vec{e}\cdot\gamma^0\vec{\gamma}\right) \quad , \qquad (\mathrm{D.8})$$

wobei $\mathrm{sh}(\omega) := \beta\gamma$ , $\varphi :=$ Drehwinkel , $\vec{e} :=$ boost–Richtung bzw. Achse , $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ .

SS 1999, Literatur zum QFT–Teil der Quantentheorie II


[Ry] L.H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge 1996

[PS] M.E. Peskin + D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison–Wesley '95

[IZ] C. Itzykson + J-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill '85

[CL] T-P. Cheng + L-F. Li, Gauge theory of elementary particle physics, Oxford '84


( hschulz@itp.uni-hannover.de )