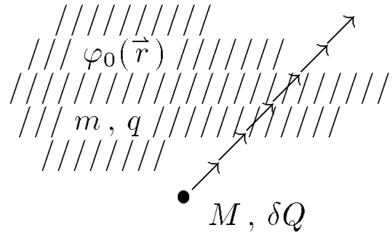
Ist $\rho = q \cdot |\Psi|^2$ *auch* Ladungsdichte ?

Alle Jahre wieder, nämlich zu Beginn quantenmechanischer Kursvorlesungen, pflegt sich die Frage einzustellen, ob man das Wort „Ladungsdichte“ nun noch benutzen dürfe – gerade noch oder gerade nicht mehr ? Manche Lehrbücher äußern sich eindeutig: man dürfe nicht. Im folgenden halten wir dagegen.

Welche Ladungsverteilung vorliegt, wird im Rahmen klassischer Elektrodynamik entschieden, nämlich z.B. dadurch, daß man eine Probeladung durch den Raum fliegen läßt und sich ihre Beschleunigung ansieht. Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m befinde sich in einem nicht-elektromagnetischen Potential $V(\vec{r}\,)$ im Grundzustand $\varphi_o(\vec{r}\,)$.



Durch das Gebirge der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte $|\varphi_o(\vec{r}\,)|^2$ fliege nun ein schweres (d.h. näherungsweise „klassisches“) Teilchen mit *infinitesimaler* Ladung δQ und mit Masse M. Es sei stark bei $\vec{R}_o(t)$ lokalisiert und zerfließe während der betrachteten Zukunft beliebig wenig: $\chi(\vec{R}, t)$. Der Hamilton–Operator $(\epsilon_o = 1/4\pi)$ des Gesamtsystems ist

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r + V(\vec{r}\,) + \frac{q \cdot \delta Q}{|\vec{r} - \vec{R}\,|} - \frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R \ . \tag{1}$$

Die Zustandsfunktion $\Psi(\vec{r}, \vec{R}, t)$ des Gesamtsystems wird bei $\delta Q \to 0$ zu $\varphi_o(\vec{r}\,)\cdot\chi(\vec{R}, t)$. Sie ist also kein H-Eigenzustand (selbst bei $\delta Q = 0$ nicht). Wir befragen also die zeitabhängige Schrödingergleichung nach der System-Zukunft; Ehrenfests Theorem :

$$M < \vec{R} >^{\cdot\cdot} = < \vec{P} >^{\cdot} = - < \nabla_R \frac{q \cdot \delta Q}{|\vec{r} - \vec{R}\,|} > \tag{2}$$

Der Erwartunswert ist mit $\Psi(\vec{r}, \vec{R}, t)$ zu bilden. Wenn uns nur die erste Ordnung in δQ interessiert, darf Ψ durch $\varphi_o \cdot \chi$ ersetzt werden :

$$M < \vec{R} >^{\cdot\cdot} = - \int_r \int_R |\varphi_o(\vec{r}\,)|^2 \, |\chi(\vec{R}, t)|^2 \, \nabla_R \frac{q \cdot \delta Q}{|\vec{r} - \vec{R}\,|} \tag{3}$$

Im räumlichen R-Integral machen wir nun (erstmals) von der starken Lokalisierung des M-Teilchens Gebrauch und ziehen sodann den Gradienten vor das Integral :

$$M \ddot{\vec{R}}_o = - \int_r q|\varphi_o(\vec{r}\,)|^2 \, \nabla_{R_o} \frac{\delta Q}{|\vec{r} - \vec{R}_o\,|} = \delta Q \, (-\nabla_{R_o}) \int d^3r \, \frac{q \cdot |\varphi_o(\vec{r}\,)|^2}{|\vec{R}_o - \vec{r}\,|} \tag{4}$$

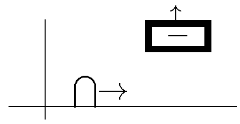
Rechts von ∇ steht nun genau das Skalarpotential einer ausgedehnten Ladungsverteilung mit $\rho = q \cdot |\varphi_o|^2$. Und als solche wird offenbar $q \cdot |\varphi_o|^2$ von einem klassischen Probeteilchen erlebt.

Fazit: man *darf* $q \cdot |\Psi|^2$ als Ladungsdichte ansprechen, *auch* nämlich und ggf. mit obigem Kommentar. (Hannover, Oktober 1990)

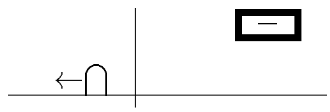
Diese beunruhigenden (und so nicht ganz haltbaren) Überlegungen wurden NICHT verändert. Das Blatt hat lediglich die Seitenzahl **1** *erhalten sowie Numerierung der vier Gleichungen. Der nachträgliche Gewinn aus Diskussionen bei der Tagung „Quantentheorie und Erkenntnis“ der Evangelischen Akademie Mülheim/Ruhr (vom 28. bis 30. Januar 1994) folgt auf Blatt* **2** *.*

Die Rechnung ist technisch in Ordnung. Zu (4) darf man ein wenig über das Fehlen der Definition $\vec{R}_0 := < \vec{R} >$ klagen. Und dabei mag sich die erste boshafte Frage ergeben, nämlich *wie lange* denn das „klassische Probeteilchen“ stark lokalisiert bleibe. (4) macht ja leider nur über dessen Mitte $\vec{R}_0$ eine Aussage. Würde das Probeteilchen beliebig lange beliebig gut lokalisiert bleiben, dann könnte man die halbe Ladung des Elektrons in einer DeBroglie-Kasten-Hälfte detektieren, bevor diese in Paris einschwebt und sodann (dann erst) per Meßprozess zu Null- oder Eins-Antwort gezwungen wird. Darob krümmt sich sogar der Schulz vor Schmerz.

Um diesen Vorgang mittels $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$ zu studieren, zur Anfangsbedingung $\varphi(\vec{r},0) = \varphi_0(\vec{r})e^{-ikx}/\sqrt{2} + \varphi_0(\vec{r})e^{ikx}/\sqrt{2}$, $\chi(\vec{R},0) := \chi_0(\vec{R})$, wählen wir $V(\vec{r})$ in (1) als nach unten begrenzende Potentialwand und betrachten zwei Hilfsprobleme. Da beide gleiches H haben, sind ihre Lösungen superponierbar.



Hilfsproblem I.: Ein *ganzes* Elektron ($\bigcap$), $\varphi_{\mathrm{I}}(\vec{r},0) = \varphi_0(\vec{r})e^{ikx}$, fliegt nach rechts und beschleunigt die (negative) Probeladung.
Einige Zeit t_1 nach dem „Stoß“ fliegt die Probeladung nach oben: $\psi_{\mathrm{I}}(\vec{r},\vec{R},t_1) \approx \varphi_r(\vec{r},t_1)e^{ikx}\chi_{\mathrm{I}}(\vec{R},t_1)$. Wem dabei das Elektron allzusehr zu zerfließen scheint, der sperre es von vornherein in den genannten DeBroglie-Halb-Kasten, d.h. er baue ein starkes, sich auseinander–ziehendes Zwei-Mulden-Potential $V(\vec{r},t)$ in (1) ein.



Hilfsproblem II.: Wie oben, aber das ganze Elektron fliege nach links (oder im linken Teil der Potential-Doppelmulde). Wegen der großen Entfernung zum Probeteilchen beschleunigt sich nun dieses so gut wie gar nicht.
Superposition:

$$\psi(\vec{r},\vec{R},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_{\mathrm{I}}(\vec{r}\,\vec{R},t) + \psi_{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{R},t)\Big) \quad . \tag{5}$$

(5) erfüllt in der Tat die gewünschte Anfangsbedingung

$$\psi(\vec{r},\vec{R},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0(\vec{r})e^{ikx} + \varphi_0(\vec{r})e^{-ikx}\right)\chi_0(\vec{R}) \quad . \tag{6}$$

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung ist eindeutig. Einige Zeit nach dem Stoß liegt somit die folgende Situation vor:

$$\psi(\vec{r},\vec{R},t_1) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\varphi_{\mathrm{I}}(\vec{r},t_1)\cdot\chi_{\mathrm{I}}(\vec{R},t_1) + \varphi_{\mathrm{II}}(\vec{r},t_1)\cdot\chi_{\mathrm{II}}(\vec{R},t_1)\Big) \quad , \tag{7}$$

$$|\psi(t_1)|^2 \quad \approx \quad \frac{1}{2}|\varphi_{\mathrm{I}}(t_1)|^2|\chi_{\mathrm{I}}(t_1)|^2 + \frac{1}{2}|\varphi_{\mathrm{II}}(t_1)|^2|\chi_{\mathrm{II}}(t_1)|^2 \quad . \tag{8}$$

Wird der beschleunigte Teil der Probeladung zu Ja-Antwort gezwungen, dann ist die rechte Elektron-Hälfte „gesehen“ worden (Feynman Lectures III) und kann nicht mehr mit der auf-Null-zustandsreduzierten linken Hälfte interferieren.

Fazit: Das Probeteilchen spaltet auf. Jenes schwere „klassische Teilchen“, mit welchem manche Quantiker so gern argumentieren, **das gibt es nicht**, selbst wenn es der einfach-ionisierte Mond wäre ! (((Besteht etwa jemand weiter auf der Existenz eines „klassischen Meßapparates“ ?)))

P.S.: Probeteilchen mit einem $U(\vec{R})$ beieinander halten? Nun, dann kann man mit späterer Messung an diesem „Punkt“ nichts lernen. Binden, per $U(\vec{R}-\vec{\rho})$, an eine schwere Masse? Nichts Neues: siehe ionisierter Mond.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)