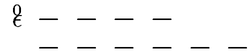
1) ○○○○ Gesamtsystem — An jeden von 4 separaten Kreisringen (R) ist ein spinloses Teilchen (m_0, $m_0 R^2 =: \theta$) gebunden. Welchen Entartungsgrad g hat das Gesamtsystem bei Energie $E = \hbar^2/\theta$? (2)

2) N Protonen auf $2\,M$ Gitterplätzen. Von diesen sind M Plätze (rechte Hälfte) energetisch um ϵ angehoben. $n := E/\epsilon$. Welchen extensiven Anteil $S^{\text{ex}}(E,N)$ hat die Entropie ? Wie hängt die Temperatur T mit n, N und M zusammen ? $n \to 0$: $T \to$? Und bei welchem n geht $T \to +\infty$? (6)

$V=0$	$V=\epsilon$
M	M

3) *Ein* Kreisring (R): mit wievielen (N=?) nicht–ww. Elektronen ist sein Zuständediagramm (malen?) zu „füllen“, damit die Grundzustandsenergie bei $E_0 = 6\hbar^2/\theta$ liegt ? (1)

4) Ein „Halbleiter“ mit dem skizzierten Zuständediagramm enthalte (im Mittel) $N = 4$ Elektronen (in $g(0) = 6$, $g(\epsilon) = 4$ ist die Spinfreiheit bereits verarbeitet). Bei welcher Temperatur T_1 ($T_1 > 0$) durchläuft das chemische Potential den Wert $\mu = 0$? Und wie (führender Term) verhält sich $\mu(T)$ bei $T \to \infty$? (3)



5) Weißer Zwerg in 4D (bei $T=0$): $\vec{k}$ hat 4 Komponenten, aber weiterhin ist $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ die Einteilchen–Energie. Wie hängen N und E mit dem Fermi–Impuls k_F zusammen ($\Omega_4 = 2\pi^2$) und wie folglich die Energiedichte ε mit der Teilchendichte n ?
↷ (Elektronen–Beitrag zur Sternenergie $E_{\text{el}} \sim$ (Sternradius R)$^{\text{welche Potenz ?}}$ (3)

6) Mit welcher T-Potenz (*nur* diese!) wächst die spezifische Wärme c_V eines Strahlungshohlraums in 25 (räumlichen) Dimensionen?
T–Potenz von c_V eines ultra–relativistischen e^+–e^-–Plasmas in 25D ? (2)

7) BE–Kondensation. Ideale massive Bosonen mögen der Einteilchen–Zustandsdichte $z(\varepsilon) = \alpha\,\theta(\varepsilon)\,(1 - e^{-\gamma\varepsilon})$ folgen (α, γ positive Konstante). Welche Gleichung legt die Einstein–Temperatur T_E fest ? Dabei stört ein Integral. Wir führen es auf eine numerische Reihe ($\sum_{n=1}^{\infty} \ldots$) zurück. Aber erst nach Beschränkung derselben auf den führenden Term bezüglich $\gamma \to 0$ kommen wir an bei $T_E = ?$ (4)

8) Aus dem Potential $\mathcal{H}(S,p,N) = a\frac{S^2}{N}\ln(\frac{p}{p_0})$ (a, p_0 positive Konstante) soll die Freie Enthalpie $G(T,p,N)$ erhalten werden, und zwar mittels expliziter Durchführung der entsprechenden Legendre–Transformation. Welche (eigenwillig implizite) Zustandsgleichung läßt sich aus dem G–Resultat gewinnen ? (4)

9) Kenne $T = T(p,V,N)$ eines Systems, will $\kappa_T = -\frac{1}{V}\partial_p V)_{T,N}$ ausrechnen. Wie geht das ? Verwenden wir nun speziell $T(p,V,N)$ (=?) des Idealgases, so sollte unsere allgmeine Formel auf $\kappa_T = 1/p$ führen. Tut sie's ? (2)

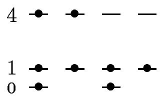
10) Linearisierte, relaxationszeitgenäherte Boltzmann–Gleichung ohne $\vec{E}$, $\nabla\mu$, ∇T, aber *mit* $\vec{B}$– und $\dot{\phi}_k$–Term. Anfangswertproblem. Bei Start liege die (via $f_k = f_k^0 - f_k^{0\prime\varepsilon}\phi_k$ definierte) Funktion $\phi_k(t=0) = \vec{a}\,\vec{k}$ vor. Wie könnte sich ϕ_k im Laufe der Zeit verändern ? Welche Identifikation überführt die zu lösende Dgl auf welches bekannte Problem der Mechanik ? (Genug, nicht lösen, denn über M. sind wir schon weit hinaus.) (3)

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$ Zeit: 2 volle Stunden **limit : 9** Punkte erreichbar : 30

(Vorlesungsmitschrift, Übungsblätter und deren eigene Bearbeitungen waren erlaubte Hilfsmittel.)

1) $E = \frac{\hbar^2}{2\theta}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) \stackrel{!}{=} \frac{\hbar^2}{2\theta} \cdot 2$. Also sind zwei der vier m^2 Null, und zwei sind Eins ●. Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, die beiden Nullen auf 4 Plätze zu verteilen ◑. Zu jedem $m^2 = 1$ gehören die beiden Zustände $m = \pm 1$ $\curvearrowright$ $g = 6 * 2 * 2 = 24$ ◑.

2) Zu gegebener Energie $E = n\epsilon$ befinden sich n Protonen rechts ◑. Entartungsgrad von E: $g = \binom{M}{N-n}\binom{M}{n} = \frac{M!}{(N-n)!(M-N+n)!}\,\frac{M!}{n!(M-n)!}$ ●. Stirling :
$S = \ln(g) = M\ln(M) - (N-n)\ln(N-n) - (M-N+n)\ln(M-N+n)$
$\quad + M\ln(M) - n\ln(n) - (M-n)\ln(M-n) + \{\quad\}$ ●
mit $\{\quad\} := -M + (N-n) + (M-N+n) - M + n + (M-n) = 0$ ◑.
$\frac{1}{T} = \partial_E S = \frac{1}{\epsilon}\partial_n S$ ◑ , $\frac{\epsilon}{T} = \ln(N-n) - \ln(M-N+n) - \ln(n) + \ln(M-n)$, d.h.
$\frac{\epsilon}{T} = \ln\left(\frac{(N-n)\,(M-n)}{n\,(M-N+n)}\right)$ ●. $n \to 0$: rhs.$\to \infty$, $T \to 0$ ◑. $T \to \infty$: ln–Argument $= 1$, d.h. $(N-n)\,(M-n) = n\,(M-N+n)$, $N - n = n$, $n = N/2$ ●.

3)  , denn diese $N = 8$ bringen $E_0 = \frac{\hbar^2}{2\theta}\,(2*0 + 4*1 + 2*4)$ auf $6\hbar^2/\theta$ ●.

4) $4 = \frac{6}{e^{-\beta\mu}+1} + \frac{4}{e^{\beta\epsilon}e^{-\beta\mu}+1}$ ●. T_1 : $e^{-\beta\mu} = 1$ gibt $1 = \frac{4}{e^{\beta\epsilon}+1}$ $\curvearrowright$ $T_1 = \epsilon/\ln(3)$ ●.
$T \to \infty$: $e^{\beta\epsilon} \to 1$, $e^{-\beta\mu} + 1 \to 10/4$, $\mu \to -T\ln(3/2)$ ●.

5) $N = 2\,\frac{V}{(2\pi)^4}\,\Omega_4 \int_0^{k_F} dk\; k^3 = \frac{V}{4\pi^2}\,k_F^4/4$ ●, $E = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{V}{4\pi^2}\,k_F^6/6$ ◑,
$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{6}\,(16\pi^2\,n)^{3/2}$ ◑. $E_{\mathrm{el}} \sim V \cdot V^{-3/2} = V^{-1/2} \sim (R^4)^{-1/2} \sim 1/R^2$ ●.
(Weil aber vermutlich in 4D auch die Graviationsanziehung mit $-1/R^2$ geht, existiert der 4D–Weißzwerg gar nicht.)

6) $E \sim \int dk\; k^{24}\,\frac{k}{e^{\beta\hbar c k}-1}$ ● $\sim T^{26}$, $c_V \sim T^{25}$ ◑.
e^+–e^-–Plasma hat nur $+$ statt $-$ im Nenner, also wächst sein c_V ebenfalls $\sim T^{25}$ ◑.

7) $N = \alpha \int_0^\infty d\varepsilon\; \frac{1-e^{-\gamma\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon}-1}$ ● $= \alpha T \int_0^\infty dx\; (1 - e^{-\gamma T x})\, e^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx}$ ●
$N = \alpha T \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\gamma T}\right)$ ◑. $\frac{1}{n+\gamma T} = \frac{1}{n}(1 - \frac{\gamma T}{n})$ ◑
$\curvearrowright$ $N = \alpha T\,\gamma T \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\alpha\gamma\pi^2}{6}\,T^2$, $T_E = \sqrt{\frac{6N}{\alpha\gamma\pi^2}}$ ●.

8) Tabelle : $G = [\,\mathcal{H} - TS\,]$ eliminiere S mittels $T = \partial_S \mathcal{H}\,)_{p,N}$ ●, $T = \frac{2aS}{N}\ln(\frac{p}{p_0})$,
$S = \frac{TN}{2a\ln(\ldots)}$ ◑, $G = \frac{a}{N}\,\frac{T^2N^2}{4a^2\ln^2} \cdot \ln - T\,\frac{TN}{2a\ln} = -\frac{T^2N}{4a\ln(\ldots)}$ ●. Tabelle : $V = \partial_p G\,)_{T,N}$ ◑
$V = \frac{T^2N}{4a}\,\frac{1}{\ln^2}\,\frac{1}{p}$, $p\ln^2(\frac{p}{p_0})\,v = \frac{T^2}{4a}$ ●.

9) $\kappa_T = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial(V,T)}{\partial(V,p)}\,\frac{\partial(V,p)}{\partial(p,T)} = \frac{1}{V}\,\frac{\partial_p T)_V}{\partial_V T)_p}$ ●.
Idealgas : $T = \frac{pV}{N}$, $\partial_p T)_V = \frac{V}{N}$, $\partial_V T)_p = \frac{p}{N}$, $\kappa_T = \frac{1}{V}\,\frac{V}{N}\,\frac{N}{p}$ ●.

10) $-\dot{\phi}_k = q(\frac{\hbar\vec{k}}{m} \times \vec{B}\,)\frac{1}{\hbar}\nabla_k\phi_k + \frac{1}{\tau}\phi_k$ ◑. DIE Idee ist $\phi_k = \vec{a}(t)\,\vec{k}$ ●
und führt auf $-\dot{\vec{a}}\,\vec{k} = \frac{q}{m}\,\vec{k}\,(\vec{B} \times \vec{a}) + \frac{1}{\tau}\vec{a}\,\vec{k}$ ◑ — zu erfüllen $\forall\ \vec{k}$
$\curvearrowright$ $m\dot{\vec{a}} = q\vec{a} \times \vec{B} - \frac{m}{\tau}\vec{a}$. Also lese man $\vec{a}$ als Geschwindigkeit einer Ladung q im homogenen Magnetfeld (mit $\vec{v}$–proportionaler Reibung) ●.