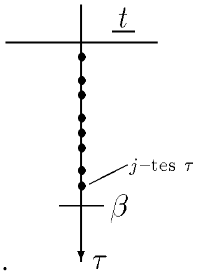
November 17, 1998

β–Periodizität

Die thermischen Greensfunktionen G_n sind definiert als thermischer Mittelwert von n Heisenberg–zeitabhängigen Feldoperatoren $\hat{\phi}^H(x)$, zeitgeordnet längs einer Kontur $\mathcal{C}$ in der komplexen t–Ebene

$$G_n \;:=\; \mathrm{Sp}\Big(\, \rho \; \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \; \hat{\phi}^H(x_1) \ldots \hat{\phi}^H(x_n) \Big) \quad .$$



n sei gerade Zahl. Eine etwaige Einschränkung an die Kontur wird sich ergeben. Kanonisches Ensemble: $\rho = e^{-\beta H}/Z$.

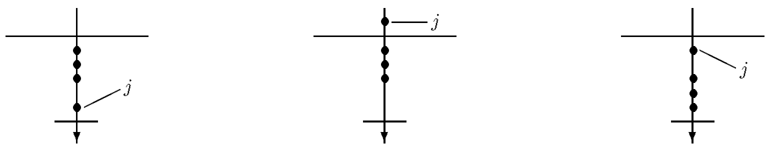
(A) Matsubara–Kontur. Alle n τ–Werte mögen auf der skizzierten τ–Achse in $(0,\beta)$ liegen. τ_j sei die größte negativ–imaginäre Zeit. Also wird $\mathcal{T}_\tau$ den Klumpen $(j) := e^{H\tau_j}\phi^S(\vec{r}_j)e^{-H\tau_j}$ nach links ordnen:

$$\begin{aligned}
G_n(\;\tau_j\;) \;&=\; Z^{-1}\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H}\; \mathcal{T}_\tau \;\{_{j\,-\,1\ \mathrm{Klumpen}}\}\;\; (j)\;\; \{_{n\,-\,j\ \mathrm{Klumpen}}\} \right) \\
&=\; Z^{-1}\eta^{j-1}\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H}\; (j)\; \mathcal{T}_\tau \;\{_{n\,-\,1\ \mathrm{Klumpen}}\} \right) \quad , \quad \eta = \begin{cases} +1 & \text{(Bose)} \\ -1 & \text{(Fermi)} \end{cases} \\
&=\; Z^{-1}\eta^{j-1}\mathrm{Sp}\left(e^{H(\tau_j-\beta)}\hat{\phi}^S_j e^{-H(\tau_j-\beta)} e^{-\beta H}\; \mathcal{T}_\tau \;\{_{n\,-\,1\ \mathrm{Klumpen}}\} \right) \\
&=\; Z^{-1}\eta^{j-1}\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H}\; \Big[\mathcal{T}_\tau \;\{_{n\,-\,1\ \mathrm{Klumpen}}\}\Big]\; e^{H(\tau_j-\beta)}\hat{\phi}^S_j e^{-H(\tau_j-\beta)} \right) \\
&=\; Z^{-1}\eta^{j-1}\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H}\; \mathcal{T}_\tau \;\{_{n\,-\,1\ \mathrm{Klumpen}}\}\; e^{H(\tau_j-\beta)}\hat{\phi}^S_j e^{-H(\tau_j-\beta)} \right) \\
&=\; Z^{-1}\eta^{j-1}\eta^{n-j}\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H}\; \mathcal{T}_\tau \;\{_{j\,-\,1\ \mathrm{Klumpen}}\}\;\; (j)_{\mathbf{neu}}\;\; \{_{n\,-\,j\ \mathrm{Klumpen}}\} \right) \quad .
\end{aligned}$$

In der drittletzten Zeile durfte die eckige Klammer (den Wirkungsbereich von $\mathcal{T}_\tau$ einschränkend) in dem Moment entfallen, wo der rechts von ihr stehende Apparat $(=:\ (j)_{\mathbf{neu}})$ der kleinsten Zeitmarke zugeordnet werden durfte: genau so würde man ja $\hat{\phi}^H(\tau_j-\beta)$ zu Papier bringen. Zuletzt ist lediglich $(j)_{\mathbf{neu}}$ an die ehemalige (j)–Position geschoben worden. Resultat:

$$G_n(\quad \tau_j \quad) = \eta^{n-1}\, G_n(\quad \tau_j - \beta \quad) \;=\; \pm\, G_n(\quad \tau_j - \beta \quad) \quad ,$$

weil n gerade. Auf der Kontur sitzt jetzt die Zeitmarke von (j) „unterhalb" des Intervalls $(0,\beta)$. Bei t–Unabhängigkeit von H haben thermische Mittel Zeit–Translations–Invarianz. Die G_n hängen also nur von τ–Differenzen ab. Alle τ_i dürfen um die gleiche Zeit verschoben werden — bis (j) wieder in $(0,\beta)$ liegt:



(B) Die betrachtete Zeitmarke von (j) liege irgendwo zwischen den anderen.
Um zu dieser die G_n–Eigenschaft zu ergründen, vergrößern wir τ_j erst einmal bis es die größte Marke ist. Dann folgt obige Manipulation. Kurz, G_n ist β–periodisch in jedem τ–Argument.

(C) Andere Konturen müssen sich außerhalb des $(0,\beta)$–Streifens wiederholen.
Das ist der Grund, weshalb „real time"–Konturen allesamt einen Endpunkt haben, welcher genau um β unter dem Anfangspunkt liegt.

(D) Die Physik (thermisch ist sie grundsätzlich immer) speziell von Bosonen $(\eta = 1)$ findet auf einer Röhre mit Umfang β statt.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)