Frequenzsummen

Auswertung einer unendlichen Summe ? — Konturintegral ! Kaum wird es konkret mit einer Statistik von Systemen aus Bosonen ($\omega_n := \pi\, 2n\, T$, $\eta = +1$) oder Fermionen ($\omega_n := \pi\,(2n{+}1)\, T$, $\eta = -1$), schon hat man sich mit Ausdrücken der Form $T \sum_n F(i\omega_n)$ herumzuschlagen. Hierin läuft n von $-\infty$ bis ∞, und $F(z)$ sei eine analytische Funktion, welche keine Pole auf der imaginären Achse hat. Fünf Schritte. Der erste Schritt verkompliziert nur, $F(i\omega_n) = (2\pi i)^{-1} \oint_n dz\;\, F(z)/(z - i\omega_n)$, aber er ist jedenfalls richtig: Das Integral umrunde die Stelle $z = i\omega_n$ mathematisch positiv und infinitesimal eng. Der zweite Schritt nutzt diese „Enge" aus,

$$\frac{T}{z - i\omega_n} = \frac{1}{e^{\beta(z - i\omega_n)} - 1} = \frac{1}{\eta e^{\beta z} - 1} = \eta\, n(z) \qquad \text{mit} \qquad n(z) := \frac{1}{e^{\beta z} - \eta} \quad , \qquad (\oint .1)$$

und der dritte (oben schon getan), daß $e^{-i\beta\omega_n} = e^{-i\pi(2n + \{{0 \atop 1}\})} = \eta$ sowie $\eta^2 = 1$. Viertens schnappt sich nun $\sum_n$ die einzig verbliebene n–Abhängigkeit und addiert die $\oint_n$–Kringel auf zu $\downarrow\uparrow$:= zwei vertikale Geraden nahe links/rechts der i–Achse :

$$T \sum_n F(i\omega_n) \;=\; \frac{\eta}{2\pi i} \int_{\downarrow\uparrow} dz\; F(z)\; n(z) \quad \overset{\not\downarrow}{=} \quad \frac{-\eta}{2\pi i} \left[\oint dz\; F(z)\; n(z) \right]_{\text{ohne n}-\text{Pole}} \quad . \qquad (\oint .2)$$

Das geschlossene Integral rechts soll schlicht die komplexe Ebene weit außen (mathematisch positiv) umrunden. Der gefährliche letzte Schritt braucht folglich (a) einen genügend raschen Abfall von F nach außen (so daß die beiden großen Halbkreise beitragslos hinzugefügt werden können) und (b) das Ignorieren der n–Pole auf der i–Achse (um die Vertikalen der zwei Halbebenen–Umrundungen vergessen zu dürfen). Kurz, da n sonst keine Pole hat, darf/soll $\bigcirc$ um die F–Pole zusammengezogen werden (bzw. an F–Schnitte heran ; letztere ggf. via Spektraldarstellung vermeiden ?!).

Beispiel : Bosonen, $\eta = 1$, $F(z) = 1/(x^2 - z^2)$. Man denke an $x^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2}$ und an den Frequenzsummen–Teil von $\sum G_0$ mit $G_0 = 1/(m^2 - P^2)$ ($\sum = T \sum_n \int d^3p\,(2\pi)^{-3}$, $P_0 = i\omega_n$) :

$$T \sum_n \frac{1}{x^2 - P_0^2} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint dz\; \frac{n(z)_{\text{ignore poles}}}{z^2 - x^2} \;=\; \frac{1 + 2\,n(x)}{2x} \;=\; \frac{1}{2x}\, \frac{\mathrm{ch}(\beta x/2)}{\mathrm{sh}(\beta x/2)} \quad . \qquad (\oint .3)$$

Das Resultat ($\oint .3$) hat es in sich : Folgerungen, Verallgemeinerung, Rückführung auf und Fußweg zu — der Reihe nach :

1. Multipliziert man ($\oint .3$) mit $-2x$ und integriert über x von c bis y , dann entsteht

$$T \sum_n \ln\left(\frac{y^2 - P_0^2}{c^2 - P_0^2}\right) \;=\; y - c + 2\,T \ln\left(\frac{1 - e^{-\beta y}}{1 - e^{-\beta c}}\right) \quad . \qquad (\oint .4)$$

Nun multipliziere man ($\oint .4$) mit β, setze $\beta y = \omega$ und lasse βc gegen Null gehen :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{(2\pi n)^2}\right) \;=\; \ln\left(\frac{\mathrm{sh}(\omega/2)}{\omega/2}\right) \quad . \qquad (\oint .5)$$

Nach Exponenzieren von ($\oint .5$) und Erweiterung auf alle n entsteht schließlich die Produkt–Weisheit

$$\prod_n{}' \frac{(2\pi n)^2}{\omega^2 + (2\pi n)^2} \;=\; \frac{\omega^2 e^{-\omega}}{(1 - e^{-\omega})^2} \quad , \qquad (\oint .6)$$

Der Strich schließt $n = 0$ aus. Man kontrolliere ($\oint .6$) anhand $\omega \to 0$. ($\oint .3$) ist Kapusta's Formel (2.38). ($\oint .5$) konnte/sollte Coleman (*Aspects of symmetrie*) gebrauchen, um eine Determinante auszuwerten (Gl. (2.16) in Lecture 7). ($\oint .6$) findet sich in Hansen (*A table of series and products*) als (89.5.16) sowie in Kleinert (*Path integrals in Q., St. and Polymer physics*) als (2.269) und ist Zwischenschritt zur Zustandssumme nicht–wechselwirkender geladener Bosonen

(Schröder+Schulz, Phys.Rev D 54 ('96) 7677, App. A) .

2. Irgendwie harmloser wirkt ($\oint$.3) , wenn man via $x = 2\pi Ta$ erst einmal „ins Normale" übersetzt und sodann ein wenig spielt ($a = ix/(2\pi)$) :

$$\sum_n \frac{1}{a^2+n^2} \;=\; \frac{\pi}{a}\,\frac{\mathrm{ch}(\pi a)}{\mathrm{sh}(\pi a)} \quad , \quad \sum_n \frac{2x}{(2\pi n)^2 - x^2} \;=\; \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1} \quad . \qquad (\oint.7)$$

Auf den ersten Blick sieht die Beziehung

$$\sum_n \frac{2x}{(2\pi n + y)^2 - x^2} \;=\; \frac{\sin(x)}{\cos(x) - \cos(y)} \qquad (\oint.8)$$

wie eine echte Verallgemeinerung von ($\oint$.7) aus. Jedoch kann ($\oint$.8) schlicht aus ($\oint$.7) hergeleitet werden. Partialbruchzerlegung liefert zunächst $\sin(x)/(\cos(x)-1) = \sum_n [\,1/(2\pi n - x) - 1/(2\pi n + x)\,]$. Dies nehme man nun einmal bei $x \to x - y$ und einmal bei $x \to x + y$, addiere die Resultate und bemühe ein wenig Trigonometrie. Fertig.

($\oint$.8) ist eine feine Formel. Sie macht sich in der Quantenmechanik nützlich, wenn man zum Dirac–Kamm den (unüblichen, aber) logischen Lösungsweg wählt : Bloch–Theorem, Bloch–Faktoren als Fourier–Reihe, stationäre Schrödinger–Gleichung für die Fourier–Koeffizienten und deren Lösung mittels ($\oint$.8) („Lehrerscript" Seite Q 22) .

3. Statistische Physik führt gern auf die folgenden beiden Integrale. Wenn man beispielsweise zu $\sum G_0$ (siehe Text vor ($\oint$.3)) auch die Integration über $\vec{p}$ ausführt, entsteht das erste. Und die Energie $E = 2\sum_{\vec{p}} p\, n(p)$ der Hohlraumstrahlung braucht das zweite. Behauptung :

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^x - 1} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{e^x-1} \;=\; \frac{\pi^4}{15} \quad . \qquad (\oint.9)$$

Hm. Das ist eben so. Im Bronstein stehts ja auch. Alles Lügen ? Die geometrische Reihe jedenfalls nicht :

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^x-1} \;=\; \int_0^\infty dx\, x \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \quad . \qquad (\oint.10)$$

Stop ! Ganz rechts, woher kam das ? — aus Bronstein, aaaha. Elende Schummler ! Es folgt vielmehr aus ($\oint$.7) (linke Gleichung) im limes $a \to 0$:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^2+n^2} \;=\; -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\,\frac{\mathrm{ch}(\pi a)}{\mathrm{sh}(\pi a)} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \;-\; \frac{\pi^4}{90}\,a^2 \;+\; \mathcal{O}(a^4) \quad . \qquad (\oint.11)$$

Rechts wurde der a^2–Term noch mit angegeben, weil ∂_a von ($\oint$.11) benötigt wird, wenn man (auf gleiche Weise) das rechte Integral in ($\oint$.9) schlachtet (ohne zu lügen).

4. „Ich kann aber keine Funktionentheorie (gerade 2. Semester absolviert)" bzw. traue ihr nicht über den Weg. Irgendwie muß doch $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$ auch „zu Fuß" zu erhalten sein. Gewiß. Allerdings führt der Trick $f(x) := \sum_{n=1}^\infty x^n/n^2$, Dgl für f etc. alsbald auf das Integral ($\oint$.10) zurück, im Kreise herum also. Eine klügere Funktion bitte (Idee Fourier–Reihe). Es ist $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \frac{1}{2}g(0)$, wenn man $g(x)$ wie folgt definiert und somit vorweg weiß, daß g gerade und 2π–periodisch ist und verschwindenden Mittelwert $\overline{g} = 0$ hat :

$$g(x) := \sum_n{}' \,\frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \Rightarrow \quad g''(x) \;=\; 1 - \sum_n \cos(nx) \;=\; 1 - 2\,\pi\,\delta_{\mathrm{periodisch}}(x) \quad . \qquad (\oint.12)$$

Die Dgl löst sich im Kopf (nachträglich jedenfalls), und die Integrationskonstante folgt aus $\overline{g} = 0$:

$$g(x) \;=\; -\frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 \qquad \text{für } 0 \le x < 2\pi \quad \text{und } 2\pi\text{–periodisch sonst} \quad . \qquad (\oint.13)$$

Und schon ist $g(0) = \pi^2/3$ herausgekommen, aus einem Standardbeispiel zur Fourier–Reihe also (periodische Parabeln . Übung : der Fußweg zu ($\oint$.7) sieht ganz ähnlich aus). Jene aus dem 2. Semester wissen das, ältere Häsinnen und Hasen kaum noch. Und ich weiß nicht, warum es so gern 13 Gleichungen werden.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)