ITP–UH 04/99 *Frühjahr 1999*
hep-ph/9908527

2+1 D Yang–Mills

Introductory Lecture Notes[1] on the Schrödinger wave functional and Hamiltonian treatment by Karabali, Kim, Nair [1]

Feldtheorie, wenn als Medium am Wärmebad gesehen, gewinnt mit T (Temperatur) einen nützlichen Parameter. Am oberen Ende der T–Achse (g klein) ist Yang–Mills–Theorie (Gluonen–Hohlraumstrahlung = QCD ohne *quarks*) der Störungstheorie zugeneigt. Jedoch trifft die entsprechende Diagrammatik derzeit bei g^6 (Freie Energie, *magnetic mass* Skala) bzw. g^4 (Selbstenergie, *super soft scale*) auf eine „Berechenbarkeits–Schwelle" : ∞ viele Diagramme (der Linde–See) tragen gleichberechtigt bei. Existiert QCD ? [2] Das zugehörige euklidisch 3–dimensionale $T = 0$–System wartet auf eine nicht–(oder nicht *so*)–störungstheoretische Behandlung.

Der Umstand, daß diese Schwelle bald überwunden sein dürfte, ist der eine Grund zur Aufregung, und *wie* dies geschieht (und eine „*unification*" ist) der andere. Die alte Idee von Feynman [3] aus 1981 kommt zu Ehren und übersetzt sich ins Konkrete. Der Eichorbit ist präparierbar. Die (hier hermitesche) Wess–Zumino–Witten–Wirkung findet eine konkrete Anwendung. Konforme Feldtheorie macht sich nützlich. Und die Thermische Feldtheorie — nach ihrer euphorischen Zeit um 1990 (Braaten–Pisarski Resummation) etwas dahin kränkelnd — findet dorthin zurück, wo sie schon immer hingehörte, zur grundsätzlichen, wiewohl Realität verstehen wollenden Feldtheorie. Ein Kreis schließt sich.

Wer alle Details erklärt, kommt nicht voran. So möchten denn diese Blätter nur einen Einstieg bieten. Sie führen nur bis zum WZW–Term und zum ersten Blick auf den *mass gap*. Ist das „Kleine Matterhorn" erreicht, finden wahre Bergsteiger schon selbst weiter. Die Arbeit [1] (kurz KKN)

D. Karabali, C. Kim and V. P. Nair, Nucl. Phys. B 524 (1998) 661

„Planar Yang–Mills theory : Hamiltonian, regulators and mass gap"

ist Leitfaden. Auch der dortige §2 ist nur *Outline of the main argument*, hat also seine Vorläufer [4]. Der Nachläufer [5] behandelt *confinement*. Auf Gleichungen in [1] wird in der Form [**n.m**] verwiesen werden — voller Freude, sie endlich begriffen zu haben. In der Regel wird aber keine Notwendigkeit bestehen, bei KKN nachzuschauen.

Deser, Jackiw, Templeton 1982 [6] : The study of vector and tensor gauge theories in three–dimensional space–time is motivated by their connection to high temperature behavior of four–dimensional models, and is justified by the special properties which they enjoy.

KKN 1998 [1] : ... there is at least one interesting physical situation, viz., the high temperature phase

[1] hschulz@itp.uni-hannover.de

of chromodynamics and associated magnetic screening effects, to which the (2+1)–dimensional theory can be directly applied.

1 Zweidimensionale klassische ED

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho \quad (1.1) \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (1.2) \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\jmath} + \dot{\vec{E}} \quad (1.4)$$

2D Physik ist spezielle dreidimensionale. Die „Punkt"–Ladungen sind homogen geladene Linien parallel z–Achse. Aus ihnen bilden sich die Dichten $\rho(x,y,t)$ und $\vec{\jmath} = (\, j_1(x,y,t)\,,\, j_2(x,y,t)\,,\, 0\,)$. Unter der Konsistenzannahme, daß auch $\operatorname{rot}\vec{B}$ die Struktur von $\vec{\jmath}$ bekommen wird,

folgt aus (1.1), (1.4), daß $\quad \vec{E} = \Big(\, E_1(x,y,t)\,,\, E_2(x,y,t)\,,\, 0\,\Big)$

Wie nun (1.2), (1.3) zeigen, hat $\quad \vec{B} = \Big(\, 0\,,\, 0\,,\, B(x,y,t)\,\Big)$

nur eine dritte Komponente, womit die Konsistenzannahme verifiziert ist. Maxwell hat sich auf (1.1), (1.2), (1.4) reduziert. Es bedarf auch keines Theorems mehr, per $B = (\operatorname{rot}\vec{A}\,)_3 = \partial_x A_2(x,y,t) - \partial_y A_1(x,y,t)$ ein 2–komponentiges Vektorpotential einzuführen. Aber (1.2) ist nötig, um $\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \operatorname{grad}\phi$ zu erlauben. Die drei Felder E_1, E_2, B bleiben invariant unter den Umeichungen $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi(x,y,t)$ und $\phi \to \phi - \partial_t\chi(x,y,t)$.

Die Eichung $\phi = 0$ (temporale Eichung [Muta, S.51], Weyl–Eichung, Strahlungseichung) fixiert nur unvollständig. Ohne $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ zu verändern, ist nämlich weiterhin die Rest–Umeichung $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi(x,y)$ möglich (note that χ must not depend on time).

Aus Vierer–Notation wird natürlich „3–Notation" mit Metrik $+\,-\,-$, $\mu = 0,1,2$, $(\,\phi\,,\, \vec{A}\,) =: A^\mu$ und $\partial^\mu = (\,\partial_0\,,\, -\nabla\,)$. Der Zusammenhang Felder–Potentiale wird folglich zu $E^j = -\partial^0 A^j + \partial^j A^0$, $B = -\partial^1 A^2 + \partial^2 A^1 = -\varepsilon_{jk}\partial^j A^k$ $(\varepsilon_{12} := 1)$. Wir definieren wie üblich den Feldtensor $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu =: F^{\mu\nu}$ und finden die resultierende Matrix–Version ganz hübsch:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 \\ E_1 & 0 & -B \\ E_2 & B & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 \\ -E_1 & 0 & -B \\ -E_2 & B & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.5}$$

Mit dieser rechnet man nämlich flugs nach, daß erwartungsgemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\left(\begin{smallmatrix} (1.5) \\ \text{linke} \\ \text{Matrix} \end{smallmatrix} \cdot \begin{smallmatrix} (1.5) \\ \text{rechte} \\ \text{Matrix} \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - B^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big([-\dot{\vec{A}} - \operatorname{grad}\phi]^2 - \frac{1}{2}[(\operatorname{rot}\vec{A})_3]^2 \Big) \end{aligned} \tag{1.6}$$

die Lagrange–Dichte ist. Der Vorteil strikter Weyl–Eichung $\phi = 0$ wird nun bei Übergang zur Hamilton–Dichte besonders deutlich:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 - \frac{1}{2}B^2 \quad , \quad \vec{\Pi} = \dot{\vec{A}} = -\vec{E} \tag{1.7}$$

$$\mathcal{H} \;=\; \Big[\, \dot{\vec{A}}\, \vec{\Pi} - \mathcal{L} \,\Big]_{\text{ersetze ...}} \;=\; \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} + B^2) \;=\; \frac{1}{2}(\dot{\vec{A}}^{\,2} + B^2) \quad . \tag{1.8}$$

Man hat es also (in strenger Weyl–Eichung) nur noch mit den zwei reellen Feldern A_1 und A_2 zu tun.

2 Yang–Mills in (2+1) D

Die Spezialitäten nicht–Abelscher Theorie haben fast nichts mit der Dimension zu tun. Lediglich läuft jetzt μ von 0 bis 2. Als g ä b e es in der x-y–Ebene auch Teilchen (ψ mit N Farbkomponenten), verlangen wir Invarianz jeglicher Physik gegen $\vec{r}$–t–abhängige Änderung der ψ–Phase. Bezeichnungsänderungen (um diese geht es hier) rütteln an der Psyche. Wir vergraben uns darum erst einmal in vertraute Hannover–Notation. Die Kopplung heiße aber unverzüglich e (statt g):

$$\left.\begin{array}{c}
U = e^{-ie\Lambda^a(x)T^a} \quad , \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA^a_\mu T^a \\
\mathsf{A}_\mu := T^a A^a_\mu \quad , \quad \mathsf{A}_\mu \to \mathsf{A}^{[U]}_\mu = U\mathsf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{e} U_{,\mu} U^{-1} \\
F^{\;a}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + ef^{abc}A^b_\mu A^c_\mu \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathsf{A}_\nu - \partial_\nu \mathsf{A}_\mu - ie\,[\,\mathsf{A}_\mu, \mathsf{A}_\nu\,] \\
(1.5): \qquad B^a = -F^{12\,a} = -\left(\partial^1 A^{2\,a} - \partial^2 A^{1\,a} + ef^{abc}A^{1\,b}A^{2\,c}\right) \\
E^{j\,a} = -F^{0j\,a} = -\left(\partial^0 A^{j\,a} - \partial^j A^{0\,a} + ef^{abc}A^{0\,b}A^{j\,c}\right) \quad , \quad A^{0\,a} \equiv 0: \; E^{j\,a} = -\dot{A}^{\,j\,a} \\
\mathcal{L}_{\text{strengWeyl}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu\,a}F^{\;a}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{j\,a}E^{j\,a} - \frac{1}{2}F^{12\,a}F^{12\,a} = \frac{1}{2}\dot{A}^{\,ja}\dot{A}^{\,ja} - \frac{1}{2}B^aB^a
\end{array}\right] \tag{2.1}$$

In gewissen Kreisen um Chern und Simons (aber der Artikel von Jackiw [7] in den Les Houches von 1983 ist trotzdem sehr schön) ist es nun weitgehend üblich, die Kopplung e in den Feldern zu verstecken und mit a n t i hermiteschen Feld–Matrizen zu arbeiten. Mit den „alten" Feldern in (2.1) ist dann folgendes zu veranstalten:

$$\begin{array}{lllll}
\Lambda^a := e\,\Lambda^{a\;\textbf{alt}} & , & A^a_j := e\,A^{a\;\textbf{alt}}_j & , & F^a_{\mu\nu} := e\,F^{a\;\textbf{alt}}_{\mu\nu} \quad , \\
B^a := -e\,B^{a\;\textbf{alt}} & , & A_j := -i\,e\,\mathsf{A}^{\textbf{alt}}_j & , & F_{\mu\nu} := -i\,e\,F^{\textbf{alt}}_{\mu\nu} \quad .
\end{array} \tag{2.2}$$

Gleichzeitig mit diesen Ersetzungen nisten wir uns durchgängig in der strengen temporalen Eichung ein. Es gibt nur noch die $2 * n$ Felder $A^a_j(\vec{r})$. Sie leben in der Ebene $\vec{r} = (x, y)$. Umeichungen mögen im Endlichen liegen: $\Lambda^a(\vec{r} \to \infty) \to 0$, und mit (2.2) ist

$$U(\vec{r}) = \exp\left(-i\Lambda^a(\vec{r})T^a\right) \quad , \quad a = 1, \ldots, N^2 - 1 =: n \quad . \tag{2.3}$$

KKN gehören nicht zu jenen Bösewichtern, welche mit antihermiteschen Generatoren herummachen. Jene Zeile, welche in (2.1) „vergessen" wurde, gilt darum alt wie neu:

$$\mathrm{Sp}\left(T^aT^b\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad , \quad \left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c \quad . \tag{2.4}$$

Mittels (2.2) wird die kovariante Ableitung hübsch einfach. ∂_j ist antihermitesch, und dies harmoniert mit dem Umstand, daß nun auch die Matrixfelder (spurfrei und) antihermitesch sind:

$$D_j = \partial_j + A_j \quad , \quad A_j = -iT^aA^a_j \quad . \tag{2.5}$$

Deren Umeichung lautet

$$A_j \to A_j^{[U]} = UA_jU^{-1} - U_{,j}U^{-1} \qquad , \qquad j = 1,2 \quad . \tag{2.6}$$

Auch Feldtensor und Magnetfeld werfen Ballast ab:

$$F_{jk}^a = \partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + f^{abc} A_j^b A_k^c \quad , \quad F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_j A_k + [\, A_j, A_k \,] \quad , \tag{2.7}$$

$$B^a = \partial_1 A_2^a - \partial_2 A_1^a + f^{abc} A_1^b A_2^c \quad , \tag{2.8}$$

und schließlich bekommt die Lagrangian die Gestalt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \dot{A}_j^a \dot{A}_j^a - \frac{1}{2e^2} B^a B^a \quad =: \ \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad . \tag{2.9}$$

Wir haben den Fuß in der Tür. (2.8) steht bei KKN im Text unter [**2.4**]. (2.6) ist [**2.1**]. Aber (2.9) ist nicht [**2.4**]. Nun ja, in letzterer hatte ein Tippteufel das e^2 in den Zähler gesetzt. Man findet das später bei KKN heraus, wenn von $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ per

$$\Pi_j^a = \partial_{\dot{A}_j^a} \mathcal{L} = \frac{1}{e^2} \dot{A}_j^a \quad , \quad \mathcal{H} = \Big[\Pi_j^a \dot{A}_j^a - \mathcal{L} \Big]_{\text{eliminiere } \dot{A}} = \frac{e^2}{2} \Pi_j^a \Pi_j^a + \mathcal{V} \tag{2.10}$$

zur Hamilton–Dichte übergegangen wird.

Man kann nun (sollte nicht) hier eine Pause einlegen und nachsehen, ob denn nun die Lagrange–Funktion (2.9) wirklich invariant ist unter den eingeschränkten (nur $\vec{r}$–abhängigen) U–Transformationen. Es i s t so. Bei entsprechendem Ehrgeiz will man diesen proof mit endlichen Eichtransformationen

$$\{A^a\} =: \vec{A} \ \ , \ \ \{\Lambda^a\} =: \vec{\Lambda} \ \ , \quad \vec{A}_j^{[U]} = e^{\vec{\Lambda}\times} \vec{A}_j \ - \int_0^1 ds \ e^{s\vec{\Lambda}\times} \vec{\Lambda}_{,j} \tag{2.11}$$

bewerkstelligen und freut sich darüber, daß $\dot{\vec{A}}_j^{[U]} = e^{\vec{\Lambda}\times} \dot{\vec{A}}_j$ ist, daß tatsächlich $D := e^{\vec{\Lambda}\times}$ eine hundsgemeinsnormale Drehmatrix im n–dimensionalen Farbraum ist und daß dabei sogar die alte Weisheit $D\vec{a} \times D\vec{b} = D\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ Verwendung findet [Bleiphys Gl.(4.9)]. Aber was solls: proof mit infinitesimalen Transformationen genügt natürlich (und nicht einmal dieser ist nötig).

3 Matrix–Parametrisierung

Der erste wichtige Schritt in das KKN–Geschäft braucht nur eine grobe Begleitphilosophie. Es gibt nur noch die $2{*}n$ Felder A_j^a. Sie unterliegen den restlichen Umeichungen (2.6). Quantisierung darf aber nur physikalische (nicht durch Umeichung erreichbare) Felder betreffen. Jeder bessere Blick in den Raum der Felder A_j^a, jeder Gewinn an Harmonie, ist also gut.

Es bereitet Vergnügen, die Matrix–Parametrisierung mit Gemüt „selber zu erfinden". Wir nehmen die Eichtransformation (2.6) zur Hand und spielen damit herum, indem wir zunächst vor jedem der beiden U^{-1} eine Eins einfügen,

$$\begin{aligned} A_j^{[U]} &= U A_j\, M\, M^{-1}\, U^{-1} - U_{\prime j}\, M\, M^{-1}\, U^{-1} \\ &= U A_j\, M\, (UM)^{-1} - U_{\prime j}\, M\, (UM)^{-1} \quad , \end{aligned} \tag{3.1}$$

woraufhin die zweite Zeile zwanglos in den Sinn kommt. Nun starren wir rechts den letzten Term an und würden statt $U_{\prime j} M$ lieber ein j–differenziertes Produkt UM dort stehen sehen. Also setzen wir $U_{\prime j}\, M = (UM)_{\prime j} - U\, M_{\prime j}$ ein. Das gibt

$$A_j^{[U]} = -(UM)_{\prime j}\, (UM)^{-1} + U\, [\, M_{\prime j} + A_j\, M\,]\; (UM)^{-1} \quad . \tag{3.2}$$

Bisher wurde nichts über M vorausgesetzt, außer natürlich, daß es (wie U, seine Generatoren und A_j) eine $N \times N$–Matrix zu sein hat. Vereinfachen ist die Losung. Die eckige Klammer möge verschwinden. Nun handelt es sich bei (3.2) aber um z w e i Gleichungen: $j = 1, 2$. Ein M zu finden, welches (zu beliebigen, spurfreien, antihermiteschen A_1, A_2) beide eckigen Klammern verschwinden läßt, das dürfte (mindestens) problematisch werden. Der Ausweg ist wundervoll. Obacht, jetzt wird es hübsch. Die Struktur von (3.2) bleibt ja erhalten, wenn man eine beliebige Linearkombination der beiden Gleichungen bildet. Vielleicht $\frac{1}{2}$ *erste* + i *mal* $\frac{1}{2}$ *zweite* ? Links entsteht dann die Kombination

$$A \;:=\; \frac{1}{2}\Big(\, A_1 \,+\, i\, A_2 \,\Big) \quad . \tag{3.3}$$

Das ist e i n Feld. Man kann sogar A beliebig (nur spurfrei) wählen und sodann A_1 und $i\, A_2$ als ihren antihermiteschen und hermiteschen Anteil identifizieren. Diese Zerlegung geht immer und ist eineindeutig. Rechts in (3.3) kombinieren sich die Differentiationen zu

$$\partial \;:=\; \frac{1}{2}\Big(\, \partial_1 \,+\, i\, \partial_2 \,\Big) \quad . \tag{3.4}$$

Wir erhalten damit

$$A^{[U]} \;=\; -(\partial\, UM)\, (UM)^{-1} \;+\; U\, [\, \partial\, M + A\, M\,]\; (UM)^{-1} \quad . \tag{3.5}$$

Diese e i n e eckige Klammer in (3.5) verschwindet, wenn sich zu jedem spurfreien A eine Matrix M so finden läßt, daß

$$A \;=\; -\; (\partial\, M)\; M^{-1} \quad . \tag{3.6}$$

Falls dies möglich ist, läuft eine Umeichung — gemäß (3.5) ohne eckige Klammer — schlicht auf

$$M^{[U]} \;=\; U\, M \tag{3.7}$$

hinaus. Und wir bekommen gratis noch eine Zugabe:

$$\Big(M^\dagger\, M\Big)^{[U]} = (UM)^\dagger\, UM = M^\dagger\, U^\dagger\, U\, M = M^\dagger M \;=:\; H \qquad \text{ist Invariante} \tag{3.8}$$

unter Eichtransformationen.

Das obige „Falls" ist noch auszuräumen. A ist spurfrei (und sonst nichts). Behauptung: d i e Eigenschaft von M, welche dies via $A = -(\partial M)M^{-1}$ liefert (und weiter nichts), ist $\det(M) = F(\,x+iy =: \overline{z}\,)$. Und die Funktion F darf festgelegt werden:

$$\det(M) = 1 \qquad , \text{ d.h. } \quad M \in \mathrm{SL(N,C)} \quad . \tag{3.9}$$

Beweis :
$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \partial \det(M) = \partial\, \varepsilon_{j_1 \dots j_N} M_{j_1 1} \,\dots\, M_{j_N N} \\ &=\; \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_k=1}^{N} \sum_{\mathrm{restl.}j's} \underbrace{\varepsilon_{j_1 \dots j_k \dots j_N}}_{\begin{subarray}{l} = \varepsilon_{j_k\, j_1 \,\dots\, (\mathrm{ohne}) \,\dots\, j_N} \,(-1)^k \;,\; j_k =: \ell \\ = (-1)^{k+\ell} \varepsilon_{j_1 \,\dots\, (\mathrm{ohne}) \,\dots\, j_N} \;, \end{subarray}} M_{j_1 1} \dots (\text{ohne } j_k\, k) \dots M_{j_N N}\; \partial M_{j_k k} \\ &=\; (\partial M)_{\ell k} \,(-1)^{k+\ell}\, (\text{Unterdeterminante})_{\ell k} \\ &=\; \det(M)\; \mathrm{Sp}\Big(\,(\partial M) M^{-1}\Big) \qquad , \qquad \text{q. e. d.} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Von gegebenem A zu den $2*n$ reellen Feldern A_1^a und A_2^a zurückzukehren, ist mittels (2.4) ohne weiteres möglich:

$$A = -\frac{i}{2}\, T^a\, (A_1^a + i\, A_2^a) \quad \Rightarrow \quad 2\, i\, \mathrm{Sp}\,(T^a A) = \frac{1}{2}\, (A_1^a + i\, A_2^a) \quad . \tag{3.11}$$

Wir sind übrigens mit (3.6) bei [**2.6**] angekommen. Und (3.7) ist [**2.9**].

Selbstverständlich kann etwas, was von x, y abhängt, auch als Funktion von $z := x - iy$ und $\overline{z} := x + iy$ angesehen werden. Für den Fall, daß nur eine dieser Variablen vorkommt, trifft der Merkvers

$$\begin{array}{llll} z := x - iy \;,\; \partial := \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) & , \quad \partial f(z) = f'(z) & , \quad \overline{\partial} f(z) = 0 \\ \overline{z} := x + iy \;,\; \overline{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) & , \quad \overline{\partial} f(\overline{z}) = f'(\overline{z}) & , \quad \partial f(\overline{z}) = 0 \end{array} \tag{3.12}$$

zu: Null bei Ableiten nach der „falschen" Variablen.

4 Auflösung von $A = -(\partial M)M^{-1}$ nach M

Wir erinnern uns, wie die Bornsche Näherung zu Papier kommt: $(\Delta + k^2)\,\psi = V\psi$, rechte Seite als bekannte Inhomogenität ansehen, Auflösung nach ψ mittels Greenscher Funktion des Helmholtz–Operators und schließlich Iteration mit physikalischem Start–ψ. Der Operator ist hier ∂. Und die Dgl ist $\partial\, M = -AM$.

Um $\partial\, G(\vec{r}\,) = \delta(\vec{r}\,)$ (2D Delta–Funktion) zu lösen setzen wir $G(\vec{r}\,) = 2(x - iy)\, f(r)$, so daß

$$\partial\, G \;=\; (\partial_x + i\partial_y)\,(x - iy)\, f(r) = (2 + r\partial_r) f(r) = \frac{1}{r}\, \partial_r\, r^2 f(r) \;\stackrel{!}{=}\; \delta(\vec{r}\,) \quad . \tag{4.1}$$

Die Null abseits Ursprung braucht also ein $f(r) \sim 1/r^2$, dies eine Einbettung von der physikalischen Seite her, und die enstehende Delta–Darstellung eine Normierung:

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{\alpha}{r^2+\varepsilon^2} \quad , \quad 1 \overset{!}{=} 2\pi \int_0^\infty dr\, r\, \left(\frac{1}{r}\,\partial_r\, r^2\right) \frac{\alpha}{r^2+\varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \\ G(\vec{r}\,) &= \frac{1}{\pi}\,\frac{x-iy}{r^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{z}{z\overline{z}+\varepsilon^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Natürlich ist $\varepsilon \to +0$ gemeint — aber bitte nicht diesen limes ausführen, „$G = 1/(\pi\overline{z})$" schreiben und dann in die Falle $\partial G = 0$ tappen. Wegen Translationsinvarianz von ∂ kann

$$\partial\, G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad \Rightarrow \quad \partial \int d^2r'\; G(\vec{r}-\vec{r}\,')\,(-A(\vec{r}\,')M(\vec{r}\,')) = -A(\vec{r}\,)M(\vec{r}\,) \tag{4.3}$$

geschrieben und eine spezielle Lösung M_{spez} der inhomogenen Dgl $\partial\, M = -AM$ abgelesen werden. Also ist

$$M = M_{\text{hom}} - \int' GAM \quad , \quad \partial M_{\text{hom}} = 0 \quad , \quad M = 1 - \int' GAM \quad . \tag{4.4}$$

Die homogene Dgl wird durch eine beliebige Matrix $M_{\text{hom}}(\overline{z})$ gelöst. Mehr hierzu steht in § 11.1 . Die gewünschte Auflösung ist also nicht eindeutig. $M_{\text{hom}} = 1$ ist e i n e erlaubte einfache Wahl.

Mit (4.4) rechts gehen wir jetzt in Matrixsprache unter Weglassen der Integrale (Summenkonvention). M ist (kontinuierlich) mit $\vec{r}$ indizierter Vektor, ebenso die 1 in (4.4). G ist doppeltindizierte Matrix, und $A(\vec{r}\,')$ dürfen wir in (4.4) durch die Matrix $\mathbf{A}(\vec{r}\,',\vec{r}\,'') := A(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'')$ ersetzen. $\mathbf{1}$ stehe für $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$. Das in der nächsten Gleichung jeweils rechts stehende A ist wieder nur Vektor. Hiermit sieht die Iteration von (4.4) folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} M &= 1 - GA + G\mathbf{A}\,GA - G\mathbf{A}\,G\mathbf{A}\,GA + G\mathbf{A}\,G\mathbf{A}\,G\mathbf{A}\,GA - \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{\mathbf{1}+G\mathbf{A}}\,GA = 1 - \frac{1}{1/G+\mathbf{A}}\,A = 1 - \frac{1}{\boldsymbol{\partial}+\mathbf{A}}\,A \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei wir $1/G = \boldsymbol{\partial}$ aus $\boldsymbol{\partial} G = \mathbf{1}$ abgelesen haben — $\boldsymbol{\partial}$ ist Matrix (!!), nämlich $\partial_{\vec{r},\vec{r}\,'} = \frac{1}{2}\delta'(x-x') + \frac{i}{2}\delta'(y-y')$. Auflösung gelungen (und [**2.7**], [**2.8**] verstanden).

Warnung: (4.4) kann man als $(\mathbf{1}+G\mathbf{A})M = 1$ schreiben. $\boldsymbol{\partial}$–Anwenden gibt $(\boldsymbol{\partial}+\mathbf{A})M = 0$: auch richtig, denn das ist (3.6). Aber Aufleiten per G von links ($\leadsto$ $(\mathbf{1}+G\mathbf{A})M = 0$) holt die Inhomogenität nicht zurück („ $\boldsymbol{\partial}1 = 0 \leadsto 1 = 0$ ").

5 Eichinvariante Freiheitsgrade : $\boldsymbol{M = V\rho}$

In den vorigen beiden Abschnitten wurden die Verhältnisse im Raum der Eichfelder A_j^a („ Oberwelt") umformuliert. Dabei war eine eineindeutige Abbildung in den Raum der SL(N,C)–Matrizen M („ Unterwelt") entstanden — jedenfalls dank der Unterwelt–Einschränkung (4.4). Jedes A–Feld weiß von seinem Partner M und umgekehrt:

$$M \xrightarrow{A=-(\partial M)\,M} A \quad , \quad A \xrightarrow{M=1-\frac{1}{\partial+A}\,A} M \quad . \tag{5.1}$$

Jeder Weisheit in der Unterwelt der M's entspricht eine solche in der realen Oberwelt der A–Felder. Vorteil der Unterwelt ist die besonders einfache Formulierung $M \to M^{[U]} = UM$ der Umeichung. Den Wunsch–Raum der physikalischen Felder können wir ebensogut in der Unterwelt zu konstruieren versuchen. Und diese Aufgabe ist ein Halbzeiler. Wenn sich generell zeigen läßt, daß sich eine beliebige Matrix M aus SL(N,C) als das folgende P r o d u k t schreiben läßt,

$$M \;=\; V\,\rho \qquad \text{mit} \quad VV^\dagger = 1\;,\;\; \det(V) = 1 \qquad\qquad (5.2)$$
$$\qquad\qquad\qquad \text{und} \quad \rho^\dagger = \rho\;,\;\; \det(\rho) = 1 \quad ,$$

dann ist klar, daß der Vorfaktor V (in jedem M) nur eine Ein–Stück–weit–Umeichung von $M = \rho$ ist und daß die hermiteschen ρ–Matrizen (mit Determinante eins) bereits **den** Wunsch–Raum in der Unterwelt darstellen und ausfüllen. KKN unter [**2.9**] sagen es so: ρ *represents the gauge–invariant degrees of freedom.* WOW!

Wir haben jetzt etwas zum Festhalten. (5.2) ist zu beweisen. Wenn in der Unterwelt schon alles klar ist, dann wird es irgendwie auch möglich sein, die Integration ($d\mu(\mathcal{C})$) über physikalische Oberwelt–Freiheitsgrade explizit zu machen und zu Quantenmechanik überzugehen: $\psi(\rho)$. KKN behaupten, man könne (statt mit ρ) den Wunsch–Raum ebensogut auch mit den Elementen

$$\rho^2 \;=\; \rho^\dagger\,\rho = M^\dagger V\,V^\dagger M = M^\dagger M \;=\; H \quad , \quad \det(H) = 1 \qquad (5.3)$$

ausstaffieren. Im ersten Moment mag man hier erschrecken, weil ja auch $(-\rho)\,(-\rho)$ zu H führt. Jedoch wird alsbald an (5.6) klar, daß ρ positiv definit ist: ρ^2–Bilden verliert keine Information. Fazit, die hermiteschen, eins–determinantischen $N \times N$–Matrizen H bilden den Unterwelt–Wunsch–Raum. Für Asylanten und andere Fremdsprachler ist dieser der „SL(N,C) / SU(N)" — und Fernziel ist $\psi(H)$.

Beweis von $\boldsymbol{M = V\rho}$:

Man jammere ein wenig herum bis Erbarmen eintritt, etwa in Form einer einschlägigen e–mail von York Schröder (DESY). Und dann geht das wie folgt.

1. $M^\dagger M$ ist hermitesch und somit diagonalisierbar:

$$U\;M^\dagger\;M\;U^\dagger \;=\; \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) \;\;=:\; \operatorname{diag} \quad . \qquad (5.4)$$

2. Wie $M^\dagger M\varphi = \lambda\varphi \quad\Rightarrow\quad \int |M\varphi|^2 = \lambda$ zeigt, sind die Diagonalelemente λ_j nicht–negativ. Sie sind sogar echt positiv, weil

$$1 \;=\; \det(UM^\dagger MU^\dagger) \;=\; \det(\operatorname{diag}) \qquad (5.5)$$

Null–Eigenwerte verbietet.

3. Jetzt d e f i n i e r e n wir die hermitesche Matrix

$$\rho \;:=\; U^\dagger\sqrt{\operatorname{diag}}\;U \qquad \Rightarrow \quad \det(\rho) \;=\; 1 \;\;,\quad \frac{1}{\rho} = U^\dagger\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{diag}}}\,U \quad , \qquad (5.6)$$

wobei die Eins–Determinante mittels (5.5) folgte und $\sqrt{}\ := +\sqrt{}$. Ist M gegeben, so liegt die Matrix ρ eindeutig fest (weil einerseits wegen (5.4) $\rho^2 = M^\dagger M$ ist und andererseits ρ nur positive Eigenwerte hat, die Elemente von $\sqrt{\mathrm{diag}}$ nämlich). Für U gilt das übrigens keineswegs. Es ist anders als bei reellen Drehmatrizen. Selbst bei Nicht–Entartung und Ordnung der diag–Elemente nach Größe kann aus U eine Diagonalmatrix U_{ph} aus Phasenfaktoren nach links abgespalten werden. Diese rekombinieren in der Bildung $U_{\mathrm{ph}}^\dagger \,\mathrm{diag}\, U_{\mathrm{ph}}$. U liegt nicht fest, aber $M^\dagger M$ und ρ sehr wohl.

Parameter–Zählen — siehe unten um (5.8) herum — gibt übrigens in (5.6) auf der linken Seite N^2-1 (in ρ) und auf der rechten Seite $N-1$ (N in diag; -1 wegen $\det = 1$) plus N^2 (in U) minus N (in U_{ph}). Es paßt.

4. So nun also ρ ein Inverses hat, dürfen wir getrost $M =: V\rho$ nach V auflösen und unverzüglich dach Determinante und Unitarität fragen:

$$\begin{aligned} V &= M\,\frac{1}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \det(V) = 1 \quad \text{und} \\ V^\dagger V &= \frac{1}{\rho}\,M^\dagger M\,\frac{1}{\rho} = U^\dagger\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{diag}}}\,U\,M^\dagger M\,U^\dagger\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{diag}}}\,U = 1 \quad . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Was man sogar aufschreiben kann (mit beiden gewünschten Eigenschaften), das existiert. Qed, fertig und dankeschön.

Zu begreifen, weshalb (5.2) gilt, bereitete anfangs einige Mühe. Zählen wir doch erst einmal reelle Paramter (sagte Ketov), um zu sehen, ob $M = V\rho$ möglich ist. Und auf Zusammenhang mit Lorentz–Transformation verwiesen beide, Prof. Lechtenfeld und Dr. Ketov. Unabhängig vom obigen Beweis ist Parameter–Zählen eigentlich ganz amüsant. Eine komplexe $N\times N$–Matrix hat $2N^2$ Elemente, die Forderung $\det(M) \stackrel{!}{=} 1$ reduziert auf $2N^2 - 2 = 2n$. V ist SU(N)–Element und hat n reelle Parameter: $V = e^{i\vec{\Lambda}\vec{T}}$. Der interessantere Faktor ist ρ mit $\det(\rho) = 1$. Weil positiv definit, ist folgendes erlaubt:

$$0 = \ln\left[\det(\rho)\right] = \mathrm{Sp}\left[\ln(\rho)\right] \quad \Rightarrow \quad \ln(\rho) = \omega^a T^a \quad , \quad \rho = e^{\vec{\omega}\vec{T}} \quad . \tag{5.8}$$

Auch ρ hat n reelle Parameter. Und man kann sie ebenfalls im Exponenten ansiedeln. $2n = n + n$. Genug gezählt. $M = V\rho$ ist aus dieser Sicht nichts weiter als eine spezielle Aufschreibungsart der SL(N,C)–Elemente.

6 Die Räume $\dfrac{\mathcal{A} \mid \mathcal{C} \mid \phantom{\mathcal{G}_*}}{\mathcal{M} \mid \mathcal{H} \mid \mathcal{G}_*}$

Etwas Besinnung ist angezeigt, Strategie und Ausblick. Die Horizontale trennt Oberwelt und Unterwelt. Alle diese Räume, welche in der Überschrift Namen bekommen haben, kennen wir eigentlich schon:

$\mathcal{A}$: der Raum a l l e r Eichfelder (egal, ob wir dabei an die reellen $A^a_j(\vec{r})$ denken, oder an die elegante Zusammenfassung zu einem komplexen spurfreien Matrix–Feld A).

$\mathcal{M}$: der Raum aller ($\vec{r}$–abhängigen) Matrizen aus SL(N,C).

$\mathcal{H}$: der Unterwelt–Wunschraum = Raum aller ($\vec{r}$–abhängigen) hermiteschen $N \times N$–Matrizen H mit Determinante 1.

$\mathcal{G}_*$: die *gauge group* = der Raum aller ($\vec{r}$–abhängigen) unitären Matrizen U aus SU(N).

$\mathcal{C}$: der Raum nur aus solchen Eichfeldern, welche nicht mehr durch Umeichung auseinander hervorgehen können = **der** interessierende physikalische Unterraum, in welchem zu Quantenmechanik übergegangen werden kann.

Kein graues Haar möge beim Anblick der folgenden Gleichung wachsen,

$$\begin{array}{c}\text{Raum aller 2-komponentigen Eichfelder}\\ \text{b i s a u f Umeichungen} =\\ \textit{space of gauge–invariant field configurations } \mathcal{C}\end{array} \;=\; \frac{\begin{array}{c}\text{Raum a l l e r Eichfelder} =\\ \textit{set of all gauge potentials } \mathcal{A}\end{array}}{\textit{gauge group } \mathcal{G}_*} \quad , \tag{6.1}$$

denn (6.1) d e f i n i e r t lediglich, was ein Bruchstrich im Gruppenchinesisch bedeutet. Bei KKN (Zitat [4] dort) ist allerlei Literatur zur Geometrie des Raumes $\mathcal{C}$ angegeben.

Jemand könnte fragen, weshalb nicht $\mathcal{H}$ und $\mathcal{C}$ identisch seien. Nun, die H's sind Unterwelt–Bewohner. Und wenn Integration über $\mathcal{A}$ nicht jene über $\mathcal{M}$ ist, weil eine Jacobi–Determinante dazwischen sitzt, dann wird wohl auch bei $\mathcal{H}$ und $\mathcal{C}$ etwas „dazwischen sitzen" .

Im Schrödinger–Bild einer Feldtheorie sind an jedem der ∞ vielen Punkte $\vec{r}$ des diskretisierten Raumes einige (hier $2 * n$) „Feldachsen" angebracht. Die reellen Werte A^a_j auf diesen sind die Variablen: $\psi\left[A^a_j(\vec{r}\,)\right]$. Jaja, wir vergessen jetzt kurzzeitig die Eichfreiheit. μ, a, $\vec{r}$ zählen nur die $2 * n * \infty$ Variablen ab. Ein Skalarprodukt $\langle 1|2\rangle$ zwischen zwei ψ–Zustandsvektoren enthält also $2 * n * \infty$ Integrale:

$$\int \psi_1^*\psi_2 \;=\; \int dA^1_1(1)\,\ldots\, dA^n_2(\infty)\Big|_?\;\psi_1^*\left[A^a_j(\vec{r}\,)\right]\;\psi_2\left[A^a_j(\vec{r}\,)\right] \;=:\; \int d\mu(\mathcal{A})\Big|_?\;\psi_1^*\psi_2 \tag{6.2}$$

Dem Produkt der Differentiale wurde rechts in (6.2) ein Name gegeben: Volumenelement $d\mu(\mathcal{A})$ im Raum $\mathcal{A}$.

Der Fragezeichen–Index verweist auf das Problem. (6.2) gibt nur Sinn, wenn zuvor andere Variable (physikalische kontra umeichische) so eingeführt werden, daß sich die Integrationen in (6.2) auf physikalische beschränken lassen. Nur von diesen hängt ψ ab: $\psi\,[\,H(\vec{r}\,)\,]$. $\vec{r}$ ist nur Variable abzählender Index. Damit zeichnet sich eine Stategie ab, genau jene, welche auch bei Anwendungen der Fourier–Transformation zutrifft: Marsch hinab in die Unterwelt (M's), dort den physikalischen Raum (H's) abspalten, Umeichvolumen wegwerfen (Faddeev und Popov lassen grüßen) und zurück nach oben:

$$\begin{array}{ccccc} d\mu\,(\mathcal{A}) & & d\mu\,(\mathcal{C}) & & \\ \downarrow & & \uparrow & & \\ d\mu\,(\mathcal{M}) & \longrightarrow & d\mu\,(\mathcal{H}) & \cdot & \{\; d\mu(\mathcal{G}_*)\;\} \end{array} \tag{6.3}$$

Die nächsten vier Abschnitte werden in den Details der Volumenelemente ertrinken. Aber dann werden sich die ψ's melden und nach einem Hamilton–Operator rufen. Die kinetische Energie $\int d^2r\ \mathcal{T}$ besteht nach (2.9) aus $2{*}n{*}\infty$ $\dot{A}$–Quadraten. Sie wird quantenmechanisch zu einem multidimensionalen Nabla–Quadrat. Wenn beschränkt auf $\mathcal{C}$ wird man es den Laplace–Operator auf $\mathcal{C}$ nennen können.

Wir erwarten, daß ein neues Volumenelement $d\mu$ das Produkt der Differentiale neuer Variabler ist **mal** eine Jacobi–Determinante. Letztere ist Betrag der Determinante der „Jacobi–Matrix" $\Im := \partial(\text{alteVariable})/\partial(\text{neue})$. Am Beispiel Kugelkoordinaten werde klar, daß und wie $\Im$ aus der Metrik ds^2 erhalten werden kann. So dienen denn die Zeilen 1 und 2 der nachfolgenden Tabelle zum Aufwärmen. Bei ds^2 in Zeile 2 teile man im Geiste durch dt^2 und denke an die kinetische Energie (v^2) eines Teilchens. Wer mit allgemeiner Relativistik zu tun hat, wird hier wohl milde lächeln ($g^{\mu\nu}$ aus ds^2 und $\sqrt{\det}$ in der Wirkung). Ausgangspunkt ist der Raum $\mathcal{A}$. Seine Metrik in Zeile 3 ist Euklidisch und harmlos (lies $\int d^2r$ als $\sum_{\vec{r}}$). Alles weitere gehe auf Konto Ausblick.

	Raum	Elemente	Metrik	Volumenelement
1	R^3	$\vec{r}$	$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	$d^3r = dx\, dy\, dz$
2	R^3	$r,\ \vartheta,\ \varphi$	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2$	$d^3r = dr r^2\, d\vartheta \sin(\vartheta)\, d\varphi$
		$\Im := \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}$	$ds^2 = \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix} \Im^T\, \Im \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}$	$d^3r = dr\, d\vartheta\, d\varphi\, \lvert\det(\Im)\rvert$
3	$\mathcal{A}$	A	$ds^2 = \int d^2r\ \delta A_j^a \delta A_j^a$	$d\mu\,(\mathcal{A}) = d\mu\,(\mathcal{M})\ \det(D^\dagger D)$
4	$\mathcal{M}$ SL(N,C)	M	$ds^2 = 8 \int d^2r$ $\mathrm{Sp}\left[\,(\delta M M^{-1})(M^{\dagger\,-1}\delta M^\dagger)\,\right]$	$d\mu\,(\mathcal{M}) =$ $d\mu(\mathcal{H})\, vol(\mathcal{G}_*)$
5	$\mathcal{H} = \frac{\mathrm{SL(N,C)}}{\mathrm{SU(N)}}$	H	$ds^2 = 2\int d^2r\ \mathrm{Sp}(H^{-1}\delta H H^{-1}\delta H)$	$d\mu\,(\mathcal{H})$
6	$\mathcal{G}_*$ =SU(N)	U		$d\mu\,(\mathcal{G}_*)$
7	$\mathcal{C}$	A_{phys}		$d\mu\,(\mathcal{C}) = d\mu(\mathcal{H})\det(D^\dagger D)$

(6.4)

Zum Stichwort Besinnung haben vielleicht die vier Sorten A's eine Übersicht verdient:

$$\begin{array}{ccccc} A_j = -iT^a A_j^a & \longleftarrow & 2n \text{ reelle } A_j^a & \longrightarrow & A^a = \frac{1}{2}\,(A_1^a + iA_2^a) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \frac{1}{2}\,(A_1 + iA_2) & = & \text{ein spurfreies } A & = & -iT^a A^a \end{array} \quad . \qquad (6.5)$$

7 $d\mu(\mathcal{A}) \to d\mu(\mathcal{M})$: Jacobi–Determinante

An einer Stelle im Raum $\mathcal{A}$ werde eine kleine Änderung $\delta A_j^a(x,y)$ des Feldes vorgenommen. Es versteht sich, daß dabei die linearen in–Matrix–Umwandlungs–Relationen (6.5) mitziehen:

$$\begin{aligned} \delta A_1^a \delta A_1^a + \delta A_2^a \delta A_2^a &= (\delta A_1^a + i\delta A_2^a)\,(\delta A_1^a - i\delta A_2^a) \;=\; 4\ \delta A^a\ \delta A^{a*} \\ &= 8\,\mathrm{Sp}\left(T^a \delta A^a\, T^b \delta A^{b*}\right) \;=\; 8\,\mathrm{Sp}\left(\delta A\, \delta A^\dagger\right) \quad . \qquad (7.1) \end{aligned}$$

7.1 $ds^2_{\mathcal{A}}$ und δM

Da A eindeutig mit M zusammenhängt, wird sich (7.1) auf δM umschreiben lassen. Wir haben lediglich $A = -(\partial M)M^{-1}$ zu bedienen und fleißig von

$$M\,M^{-1} = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \delta M^{-1} = -M^{-1}\delta M M^{-1} \;\text{ und }\; \partial M^{-1} = -M^{-1}(\partial M)M^{-1}$$

Gebrauch zu machen:

$$\begin{aligned}
\delta A &= -(\partial\delta M)M^{-1} - (\partial M)\delta M^{-1} \\
&= -\partial\left[\delta M M^{-1}\right] + \delta M\partial M^{-1} + (\partial M)M^{-1}\delta M M^{-1} \\
&= -\partial\left[\delta M M^{-1}\right] - \delta M M^{-1}(\partial M)M^{-1} + (\partial M)M^{-1}\delta M M^{-1} \\
&= -\left\{\,\partial\left[\delta M M^{-1}\right] \;+\; \left[A\,,\,\delta M M^{-1}\right]\,\right\} \\
&= -\,\mathbb{D}\;\delta M M^{-1} \qquad \text{mit} \quad \mathbb{D} := \partial + [\,A\,,\quad] \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

Vermutlich (Sinn oder Willkür bei KKN ?) kann statt δ ebensogut auch d geschrieben werden, wobei dann aber Wirkungsweise–Begrenzer nötig würden. δ beziehe sich stets nur auf die unmittelbar folgende Matrix. Die kovariante Ableitung wird in allerlei Varianten auftauchen. In fundamentaler Darstellung haben wir $D_j = \partial_j + A_j$ und können die beiden zu $D := \frac{1}{2}(D_1 + iD_2) = \partial + A$ kombinieren. $\mathbb{D}$ in (7.2) ist die Kommutator–Variante der Ableitung in adjungierter Darstellung. Deren Index–Variante D^{ab} kommt ins Spiel, wenn man $\mathbb{D}$ auf ein Matrixfeld $\Lambda^a T^a$ anwendet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\,\Lambda^a T^a &= T^a\partial\Lambda^a - iA^b\left[T^b\,,\,T^c\right]\Lambda^c \\
&= T^a D^{ac}\Lambda^c \qquad \text{mit} \qquad D^{ac} := \delta^{ac}\partial + f^{abc}A^b \quad . \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

Mit A^b ist natürlich $\frac{1}{2}\left(A^b_1 + iA^b_2\right)$ gemeint. In (7.1) wird auch $\delta A^\dagger$ benötigt. Ausgehend von $A^\dagger = -M^{\dagger\,-1}\,\overline{\partial} M^\dagger$ mit $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 - i\partial_2\right)$ entsteht in jedem Schritt das Gekreuzte von (7.2):

$$\delta A^\dagger = \;\ldots\; = -\,\overline{\mathbb{D}}\;M^{\dagger\,-1}\delta M^\dagger \quad \text{mit} \quad \overline{\mathbb{D}} := \overline{\partial} - \left[A^\dagger\,,\quad\right] \quad . \qquad (7.4)$$

Nach Einsetzen in (7.1) und Summation $\int d^2r$ über Raumpunkte entsteht als Zwischenresultat

$$ds^2_{\mathcal{A}} = \int d^2r\;\delta A^a_j\,\delta A^a_j \;=\; 8\int d^2r\;\mathrm{Sp}\left(\left[\mathbb{D}\,\delta M M^{-1}\right]\,\left[\overline{\mathbb{D}}\;M^{\dagger\,-1}\delta M^\dagger\right]\right) \quad , \qquad (7.5)$$

Dies war nur der erste von drei Schritten. Im zweiten Schritt interessiert δM, und wir finden — unabhängig von (7.5) — das Volumenelement $d\mu(\mathcal{M})$. Erst danach (3. Schritt) wird der Zusammenhang zwischen $d\mu(\mathcal{A})$ und $d\mu(\mathcal{M})$ hergestellt.

7.2 $d\mu(\mathcal{M})$

Gruppenelemente (hier M's) gehen durch Multiplikationen auseinander hervor. Die Metrik, sagt Prof. Dragon, erschließe sich ausgehend vom 1–Element. Infinitesimale Abweichung von der Eins kann per $1 + \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\,\vec{T}$ parametrisiert werden. Die Komponenten ε^a von $\vec{\varepsilon}$ sind komplex. Linear in $\vec{\varepsilon}$ ist $\det(M) = 1$ gewährleistet. Nun setzen wir uns mitten in die

Gruppe hinein und wollen einen kleinen Unterschied zwischen M und Nachbar–Element $M+\delta M$ dingfest machen — durch Multiplikation:

$$\begin{aligned} M+\delta M &= \left(1+\tfrac{1}{2}\vec{\varepsilon}\,\vec{T}\,\right) M \quad\Rightarrow\quad \delta M = \tfrac{1}{2}\vec{\varepsilon}\,\vec{T}\,M \\ \delta M\,M^{-1} &= \tfrac{1}{2}\vec{\varepsilon}\,\vec{T} \quad , \quad \varepsilon^a \;=\; 4\,\mathrm{Sp}\left(T^a\,\delta M\,M^{-1}\right) \quad . \end{aligned} \tag{7.6}$$

Der unnötig erscheinende Vorfaktor $\frac{1}{2}$ wird sogleich für einfache Resultate sorgen. $d\mu(\mathcal{M})$ folgt aus Metrik, und diese braucht quadratisch infinitesimale Größen. Die erste naheliegende Idee funktioniert:

$$8\,\mathrm{Sp}\left(\delta M M^{-1}\,M^{\dagger\,-1}\delta M^\dagger\right) \;=\; 2\,\mathrm{Sp}\left(\varepsilon^a T^a\,\varepsilon^{b\,*}T^b\right) \;=\; \varepsilon^a\varepsilon^{a\,*} \;=\; \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 \quad , \tag{7.7}$$

wobei natürlich über a summiert wird, und $\varepsilon_1^a := \Re e\,(\varepsilon^a)$, $\varepsilon_2^a := \Im m\,(\varepsilon^a)$. Die Metrik im Raum der $\vec{r}$–abhängigen M–Felder ist somit

$$ds^2_{\mathcal{M}} = 8\int d^2r\;\mathrm{Sp}\left(\delta M M^{-1}\,M^{\dagger\,-1}\delta M^\dagger\right) \;=\; \int d^2r\;\varepsilon^a\varepsilon^{a\,*} \quad . \tag{7.8}$$

Die erste Gleichung in (7.8) ist **[2.12]** und in der 4. Zeile der Tabelle (6.4) verzeichnet. Die Epsilontik ist Eigenbräu. Es steht keine Jacobi–Matrix rechts in (7.8). In unserer epsilontischen Notation ist folglich

$$d\mu(\mathcal{M}) \;=\; \prod_{\vec{r}}\,\prod_{a,\,j}\;\varepsilon_j^a \;=\; \prod_{\vec{r}}\,\prod_{a}\;\varepsilon_1^a\varepsilon_2^a \tag{7.9}$$

das Volumenelement (*Haar measure*) im Raum $\mathcal{M}$. Mit (7.9) startet § 8.

7.3 $d\mu(\mathcal{A}) \;=\; d\mu(\mathcal{M})$ mal Jacobi

Jetzt erst steht eine ordentliche Jacobi–Matrix ins Haus. Wir beginnen wieder mit der Metrik, nämlich mit (7.5), setzen dort die Epsilontik (7.6) ein und greifen auf (7.3), (7.4) zurück:

$$\begin{aligned} ds^2_{\mathcal{A}} &= 2\int d^2r\;\mathrm{Sp}\left(\left[\,\mathbb{D}\,\varepsilon^a T^a\,\right]\,\left[\,\overline{\mathbb{D}}\,\varepsilon^{b\,*}T^b\,\right]\right) \;=\; 2\int d^2r\;\mathrm{Sp}\Big(\left[\,T^a\,D^{ac}\varepsilon^c\,\right]\,\left[\,T^d\,D^{db\,*}\varepsilon^{b\,*}\,\right]\Big) \\ &= \int d^2r\;\left[\,D^{ac}\varepsilon^c\,\right]\,\left[\,D^{ab\,*}\varepsilon^{b\,*}\,\right] \qquad \text{wobei} \quad D^{ab\,*} := \left\{\,\delta^{ab}\,\overline{\partial}+A^{\bullet\,*}f^{a\bullet b}\,\right\} \\ &= \int d^2r\;\left[\,D\vec{\varepsilon}\,\right]\cdot\left[\,D\vec{\varepsilon}\,\right]^* \;=\; \int d^2r\;\left(\left[\,\Re e(D\vec{\varepsilon}\,)\right]^2 + \left[\,\Im m(D\vec{\varepsilon}\,)\right]^2\right) \quad . \\ &\qquad\qquad D =: D_1+iD_2 \quad , \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1+i\vec{\varepsilon}_2 \quad : \\ &= \int d^2r\;\Big(\left[\,D_1\vec{\varepsilon}_1\,\right]^2+\left[\,D_2\vec{\varepsilon}_2\,\right]^2 - 2\,\left[\,D_1\vec{\varepsilon}_1\,\right]\,\left[\,D_2\vec{\varepsilon}_2\,\right] \\ &\qquad\qquad + \left[\,D_1\vec{\varepsilon}_2\,\right]^2+\left[\,D_2\vec{\varepsilon}_1\,\right]^2 + 2\,\left[\,D_1\vec{\varepsilon}_2\,\right]\,\left[\,D_2\vec{\varepsilon}_1\,\right]\Big) \\ &= \int d^2r\;\left[\begin{pmatrix} D_1 & -D_2 \\ D_2 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix} D_1 & -D_2 \\ D_2 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2\end{pmatrix}\right] \;=:\; \vec{[\,]}\cdot\vec{[\,]} \quad . \end{aligned} \tag{7.10}$$

In der dritten Zeile ist natürlich „D" nur die Abkürzung für die Matrix D^{ab} (Verzeihung! Zu viele D's. Die alte Bedeutung als $\partial + A$ ziehen wir jetzt kurzerhand aus dem Verkehr). Der Operator D ist nicht nur $n\times n$–Matrix sondern enthält auch Differentiation. Wie weit diese wirkt, ist in (7.10) konsequent durch eckige Klammern abgegrenzt.

Rechts unten in (7.10) haben wir auch noch $\int d^2r$ als Skalarprodukt–Summation interpretiert. Vorsicht Falle. In diesem Moment ist nun auch $\vec{[\ ]}$ als $\vec{r}$–indizierter, riesiger Vektor zu lesen. Schließlich werden die D's zu Riesenmatrizen $\mathbf{D}$, welche das Indexpaar $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ tragen und per $\int' D_{rr'}\varepsilon_{r'}$ anzuwenden sind. Wir hatten solcherlei bereits in (4.5) und übernehmen darum die boldface–Notation. All dies war zu sagen, um aus (7.10) die Jacobi–Matrix $\Im$ richtig abzulesen. Das Volumenelement bekommt daraufhin die Gestalt

$$d\mu(\mathcal{A}) \;=\; d\mu(\mathcal{M})\;|\det(\Im)| \;=\; d\mu(\mathcal{M})\;\left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1 & -\mathbf{D}_2\\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_1\end{pmatrix}\right| \quad . \tag{7.11}$$

Die Matrix $\Im$ ist reell. Aber $\det(\Im)$ hat noch nicht die gewünschte Form $\det(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D})$. Diese wird mit der folgenden schönen Herleitung (diagonalisiere $\mathcal{I}$, sagt Dr. J. Schulze) erreicht:

$$\begin{aligned}
\Im \;&=\; \begin{pmatrix}\mathbf{D}_1 & -\mathbf{D}_2\\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_1\end{pmatrix} \;=\; \mathbf{D}_1\,1 + \mathbf{D}_2\,\mathcal{I} \quad , \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \\
W \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} \;,\; W\,\mathcal{I}\,W^\dagger \;=\; \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} \;,\; \det(W) = \det(W^\dagger) = 1 \quad , \\
\det(\Im) \;&=\; \det\Big(W\Im W^\dagger\Big) \;=\; \det\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1 + i\mathbf{D}_2 & 0\\ 0 & \mathbf{D}_1 - i\mathbf{D}_2\end{pmatrix} \;=\; \det\left(\mathbf{D}\,\mathbf{D}^*\right) \quad .
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Das $\mathcal{A}$–Raum–Volumenelement hat nun die Gestalt $d\mu(\mathcal{A}) = d\mu(\mathcal{M})\,|\det(\mathbf{D}\mathbf{D}^*)|$. Sind wir zufrieden? Die Betragsstriche stören noch.

Was mag wohl beim Vorzeichen solcher Determinanten schon gesündigt worden sein (nur wir nicht: die Betragsstriche stehen da). Nach Blick auf (7.3) schreiben wir die Matrix $\mathbf{D}$ mit allen Indizes auf,

$$\mathbf{D}\;:\quad D^{ab}_{rr'} = \delta^{ab}\partial_{rr'} + A^\bullet(\vec{r}\,)f^{a\bullet b}\delta_{rr'} \quad , \tag{7.13}$$

und erkennen, daß

$$\mathbf{D}^T\;:\quad (D^T)^{ab}_{rr'} = \delta^{ab}\left(-\partial_{rr'}\right) + A^\bullet(\vec{r}\,)f^{b\bullet a}\delta_{rr'} \qquad \text{ergo}\quad \mathbf{D}^T = -\mathbf{D} \tag{7.14}$$

ist und folglich $\mathbf{D}^* = -\mathbf{D}^\dagger$. Zur Erinnerung: $A^\bullet = \frac{1}{2}\left(A_1^\bullet + iA_2^\bullet\right)$, $A_j^\bullet$ reell, und $\partial_{rr'} = -\partial_{r'r}$ stand unter (4.5). Vektorpfeile über r–Indizes sind bitte hinzu zu denken. Falls die hermitesche Matrix $\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}$ nicht gerade einen Null Eigenwert hat (das Risiko gehen wir ein), dann haben wir

$$-\mathbf{D}\mathbf{D}^* = \mathbf{D}\mathbf{D}^\dagger \;\;\begin{matrix}\text{ist positiv}\\ \text{definit}\end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\det\left(\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right)| \;=\; \det\Big(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\Big) \;=:\; e^\Gamma \quad , \tag{7.15}$$

und

$$d\mu\left(\mathcal{A}\right) \;=\; d\mu\left(\mathcal{M}\right)\;\det\Big(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\Big) \tag{7.16}$$

ist das Resultat dieses Abschnitts. Es vervollständigt Zeile 3 der Tabelle (6.4). Jenes Γ in (7.15) ist reell. Mit (7.10) bis (7.15) sind wir übrigens bei KKN um zwei Zeilen Text unter [**2.12**] voran gekommen.

8 $d\mu(\mathcal{M}) \to d\mu(\mathcal{H})$: Abspalten des „ volume”

Einen „ Fußweg” gehen ist eine Sache, ihn anzulegen (wo entlang?) eine andere. Es war sehr hilfreich, daß nun, mit Beginn dieses Abschnitts, Herr Jens Reinbach voll mitgearbeitet hat. Man frage nicht nach „ wer–was” , denn wirklich getan haben es ja KKN.

Zum Abkoppeln unphysikalischer Freiheitsgrade steht aus Abschnitt 5 der „ Separationsansatz”

$$M \;=\; U\,\rho \qquad \Rightarrow \qquad \delta M = \delta U\,\rho + U\,\delta\rho \tag{8.1}$$

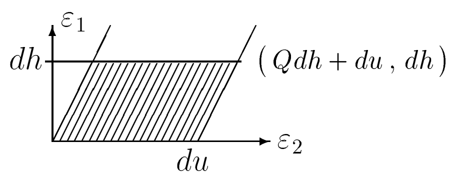
bereit. Die Änderung der Bezeichnung von V zu U signalisiere eine solche der Philosophie: von jedem physikalischen „Punkt” ρ starten sämtliche Umeichungen U . Die Grobstruktur der jetzt anstehenden Rechnungen läßt sich in Worte fassen. Und das Resultat ist so einfach, daß man es in (8.2) vorweg verstehen kann.

Ausgangspunkt ist $d\mu(\mathcal{M})$, d.h. das Produkt (7.9) von Differentialen. Der Zusammenhang der Epsilons mit δM steht in (7.6). Mittels (8.1) wird sich ε_1^a als rein ρ–ische Bildung erweisen (nur von ρ und $\delta\rho$ abhängend). Hingegen setzt sich ε_2^a additiv zusammen aus einem rein U–ischen und einem rein ρ–ischen Ausdruck. Der letztere kann nur Linearkombination der ε_1^a's sein. Hiernach sind neue Variable h und u nahegelegt:

$$\varepsilon_1^a \;=\; dh^a \quad , \quad \varepsilon_2^a \;=\; Q^{ab}dh^b \;+\; du^a \quad :$$

$$\Big[\prod_a \varepsilon_1^a\varepsilon_2^a\Big] \;=\; \Big[\prod_a dh^a du^a\Big]\;\left|\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ Q^{ab} & 1\end{pmatrix}\right| = \Big[\prod_a dh^a\Big]\Big[\prod_a du^a\Big] \quad . \tag{8.2}$$

Ganz hübsch, nicht wahr, denn rechts in (8.2) steht bereits die gewünschte Zerlegung. Integration über du gibt den Umeichraum $\mathcal{G}_*$, und aus den dh's wird sich $d\mu(\mathcal{H})$ stricken lassen. Anders als in **[2.13]**, **[2.14]** sind weder *wedge* Produkte noch \propto Zeichen erforderlich. Im übrigen muß auch einmal eine Figur zu sehen sein.



Der Reihe nach. Mit (7.6), (8.1) und $[\,\mathrm{Sp}(A)\,]^* = \mathrm{Sp}(A^\dagger)$ haben wir zunächst

$$\begin{aligned}
\varepsilon^a \;&=\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(T^a\,[\,\delta U\rho + U\delta\rho\,]\;\rho^{-1}U^\dagger\Big) \;=\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a U^\dagger\delta U\Big) \;+\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a\delta\rho\,\rho^{-1}\Big)\\
\varepsilon^{a\,*} \;&=\; -\,4\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a U^\dagger\delta U\Big) \;+\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a\rho^{-1}\delta\rho\Big) \qquad , \qquad \overline{T}^a := U^\dagger T^a U \quad ,
\end{aligned} \tag{8.3}$$

wobei $\delta U^\dagger U \;=\; -U^\dagger\delta U$ zu Ehren kam. Man sieht bereits, daß sich U–ische Terme im Realteil kompensieren werden:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^a = \frac{\varepsilon^a + \varepsilon^{a\,*}}{2} \;&=\; 2\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a\rho^{-1}\;[\,\rho\,\delta\rho + \delta\rho\,\rho\,]\;\rho^{-1}\Big)\\
&=\; 2\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a H^{-1/2}\delta H H^{-1/2}\Big) \;=:\; dh^a \quad .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Aber der Imaginärteil behält zwei Terme:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2^a = \frac{\varepsilon^a - \varepsilon^{a\,*}}{2\,i} \;&=\; -2\,i\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a\;\Big[\,\delta\rho\,\rho^{-1} - \rho^{-1}\,\delta\rho\Big]\Big) \;+\; du^a\\
\text{mit}\qquad du^a \;&:=\; -\,4\,i\,\mathrm{Sp}\Big(\overline{T}^a U^\dagger\,\delta U\Big) \;=\; -\,4\,i\,\mathrm{Sp}\Big(T^a\delta U\,U^\dagger\Big) \quad .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Unter (5.8) war klar geworden, daß ρ durch n reelle Parameter festliegt. Jede einfach–infinitesimale rein ρ–ische Bildung — so auch der entsprechende Term in (8.5) — kann also aus dh^a linearkombiniert werden:

$$-2\,i\,\mathrm{Sp}\left(\overline{T}^a\,\left[\delta\rho\,\rho^{-1}-\rho^{-1}\,\delta\rho\right]\right)\;=:\;Q^{ab}dh^b \quad . \tag{8.6}$$

Damit haben wir $\varepsilon_2^a = Q^{ab}dh^b + du^a$ und sind schon bei (8.2) angekommen — es sei denn, jemand will zu (8.6) die absolute Sicherheit erlangen. Wir kommen darauf unter (8.13) zurück. Man darf einwenden, daß sich ja wegen $\overline{T}^a := U^\dagger T^a U$ in (8.4), (8.5) und somit in Q noch U–Abhänigkeit verberge. Richtig. Aber in (8.2) fällt die gesamte Matrix Q heraus!

Inwiefern die unitäre Drehung von $\vec{T}$ auch in $d\mu(\mathcal{H})$ irrelevant ist, das sehen wir uns als nächstes an. Die Matrizen H sind hermitesch und haben bei infinitesimaler Änderung hermitesch zu bleiben:

$$H+\delta H = H^{1/2}\left(1+\eta^a\overline{T}^a\right)H^{1/2} \quad , \quad \eta^a \;\text{ reell} \quad . \tag{8.7}$$

Wegen $\mathrm{Sp}(T^a)=0$ bleibt linear in η auch die Determinante eins. Die Auflösung nach η^a enthüllt, daß

$$\eta^a = 2\,\mathrm{Sp}\left(\overline{T}^a H^{-1/2}\delta H H^{-1/2}\right) \;=\; dh^a \tag{8.8}$$

ist, vgl. (8.4). Im Raum $\vec{r}$–abhängiger H's ist somit

$$d\mu(\mathcal{H}) = \prod_{\vec{r}}\prod_a dh^a \quad , \quad d\mu(\mathcal{M}) = \prod_{\vec{r}}\prod_a du^a\,\cdot\,d\mu(\mathcal{H}) \quad , \tag{8.9}$$

wobei wir in jede eckige Klammer in (8.2) auch noch das Produkt über Raumpunkte aufgenommen haben. Die Metrik im Raum $\mathcal{H}$ ist übrigens

$$ds^2_{\mathcal{H}} = \int d^2r\;\eta^a\eta^a = \int d^2r\;2\,\mathrm{Sp}\left(\eta^a\overline{T}^a\overline{T}^b\eta^b\right) \;=\; 2\int d^2r\;\mathrm{Sp}\left(H^{-1}\delta H H^{-1}\delta H\right) \tag{8.10}$$

(wieder) in Übereinstimmung mit [**2.17**].

Nun. Das ist ja alles schlau gemacht, aber via (8.8) steht doch noch immer U im dh^a ! Ja. Aber eine $U^\dagger\vec{T}\,U$–Transformation enspricht einer normalen reellen Drehmatrix $\mathcal{D}$, angewandt auf $\vec{\eta}$, und die Determinante von $\mathcal{D}$ ist eins. — „Will sehen" :

$$\eta^a =: \mathcal{D}^{ab}\,\eta^b_{\mathbf{un}} \;\; , \;\; \eta^a_{\mathbf{un}}\eta^a_{\mathbf{un}} \;=\; \eta^a\eta^a = \eta^b_{\mathbf{un}}\,(\mathcal{D}^T)^{ba}\,\mathcal{D}^{ac}\,\eta^c_{\mathbf{un}} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{D}^T\mathcal{D}=1 \quad . \tag{8.11}$$

$\eta^a_{\mathbf{un}}$ ist hierbei (8.8) mit **un**verdrehten T^a. Und bei $\eta^a_{\mathbf{un}}\eta^a_{\mathbf{un}} = \eta^a\eta^a$ haben wir auf die Gleichung (8.10) geblickt, welche auch unverdreht gilt. Man schreibe zuerst alle u–Integrale nach links und begradige dann den $\mathcal{H}$–Raum bis er von U nichts mehr weiß. Jetzt können die u–Integrale wieder nach rechts:

$$\int d\mu(\mathcal{M}) = \int d\mu(\mathcal{H})\;\prod_{\vec{r}}\prod_a du^a \;\;=:\;\; \int d\mu(\mathcal{H})\cdot d\mu(\mathcal{G}_*) \quad . \tag{8.12}$$

Die du^a hätten wir übrigens vorweg als *Haar measure* in $\mathcal{G}_*$ per $U+\delta U = (1+\frac{i}{2}du^aT^a)U$ einführen können. Aber nun ist sie doch schon weg, die gesamte Eichfreiheit.

Wir ziehen Bilanz aus drei Abschnitten und kombinieren die Gleichungen (6.1) ($\mathcal{C}$ ist der von Umeichungen befreite Raum $\mathcal{A}$), (7.16) ($d\mu(\mathcal{A}) \to d\mu(\mathcal{M})$) und (8.12):

$$\boxed{d\mu(\mathcal{C}) \;=\; \frac{d\mu(\mathcal{A})}{d\mu(\mathcal{G}_*)} \;=\; \frac{d\mu(\mathcal{M})\,\det\left(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\right)}{d\mu(\mathcal{G}_*)} \;=\; d\mu(\mathcal{H})\,\det\left(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\right) \quad .} \tag{8.13}$$

(8.13) ist [**2.19**]: *the problem is thus reduced to the calculation of the determinant of the two–dimensional operator* $\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}$.

Es gab da noch die unter (8.6) angesprochene Sicherheitsfrage um die Existenz der Matrix Q^{ab}. Um sie einigermaßen explizit anzugeben, machen wir von der ρ–Darstellung (5.8) Gebrauch:

$$\begin{aligned} \rho \;&=\; e^{\vec{\omega}\vec{T}} \quad , \quad \delta\rho = d\omega^a\,\partial_{\omega^a}\,e^{\vec{\omega}\vec{T}} = d\omega^a \int_0^1 ds\; e^{s\,\vec{\omega}\vec{T}}[\partial_{\omega^a}\,\vec{\omega}\vec{T}\,]e^{(1-s)\,\vec{\omega}\vec{T}} \\ \delta\rho\,\rho^{-1} \;&=\; d\omega^a \int_0^1 ds\;\tau^a(s) \quad , \quad \tau^a(s) \;:=\; e^{s\,\vec{\omega}\vec{T}}\,T^a\,e^{-s\,\vec{\omega}\vec{T}} \\ \rho^{-1}\delta\rho \;&=\; [\delta\rho\,\rho^{-1}]^\dagger \;=\; d\omega^a \int_0^1 ds\;\tau^{a\,\dagger}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.14}$$

Mit diesen Details ($\overline{T}^a$ ist jetzt einfach T^a genannt) werden (8.4) und (8.6) zu

$$\begin{array}{c} dh^a = 2\,S^{ab}\,d\omega^b \\ Q^{ab}dh^b = -2\,R^{ab}\,d\omega^b \end{array} \qquad \text{mit} \qquad \left.\begin{array}{c} S^{ab} \\ R^{ab} \end{array}\right\} \;:=\; \int_0^1 ds\;\mathrm{Sp}\left(T^a \left\{\begin{array}{c} [\tau^b + \tau^{b\,\dagger}] \\ i\,[\tau^b - \tau^{b\,\dagger}] \end{array}\right\}\right) \quad , \tag{8.15}$$

und $d\omega^b$ läßt sich eliminieren:

$$2\,d\vec{\omega} = S^{-1}\,d\vec{h} \quad : \qquad Q \;=\; -\,R\,S^{-1} \quad . \tag{8.16}$$

Was man sogar aufschreiben kann, das existiert. Sicherheitsstandard erreicht.

9 Funktionale Dgln für $S(H)$

Wollen wir dem KKN–Leitfaden [1] folgen, so ist jetzt die eigenwillige Beziehung [**2.20**]

$$e^\Gamma \;=\; \det\left(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\right) \;=\; \sigma^n\,e^{2N\,S} \qquad \text{mit} \quad \sigma \;=\; \frac{\det'\left(-\overline{\partial}\partial\right)}{\int d^2r} \tag{9.1}$$

an der Reihe. Hieran interessiert uns aber (vorerst) nur der folgende Umstand. Der Vorfaktor σ enthält (dürfte enthalten[2]) alles, was übrig bleibt, wenn man A Null werden

[2] Der Nenner im Faktor σ ist noch nicht recht verstanden. Entweder verweist er nur auf eine spezielle \prime–Festlegung, oder (9.1) führt in höhere Spären [8, 9]. Die Determinante eines positiv definiten Operators ist das Produkt seiner Eigenwerte: $\det(P) = \exp\left(\mathrm{Sp}[\ln(P)]\right) = \exp\left(\sum \ln(\lambda)\right) = \prod \lambda$. Speziell $-\overline{\partial}\partial = -\Delta/4$ hat $\lambda = \vec{k}^{\,2}/4$ und $\vec{k} = 0$ ist auszuschließen (bei $A = 0$ haben räumlich konstante ε^a bereits zu (7.10) keinen Beitrag). Es ist auch richtig, daß $\det'$ eine groß–k–Regularisierung braucht. Die Potenz n ist ebenfalls klar – nur die Fläche im Nenner von σ nicht.

läßt. Nichttriviale A–Abhängigkeit verbleibt in S und wir gewinnen eine Nebenbedingung an das durch (9.1) definierte Funktional S, nämlich

$$\lim_{A\to 0} S \;=\; \lim_{H\to \mathrm{const}} S\,[\,H\,] \;=\; 0 \quad . \tag{9.2}$$

Daß S wegen Eichinvarianz nur von den physikalischen Freiheitsgraden H abhängen dürfte, ist plausibel und wird uns noch beschäftigen. $A = -(\partial M)M^{-1}$ verschwindet bereits bei räumlich konstanter Matrix M. Dann ist auch $H = M^\dagger M$ konstant. Das wiederum wird für $S = 0$ ausreichen.

Was jetzt anhebt, um das Funktional S zu ergründen, folgt dem Motto „ableiten, regularisieren, wieder aufleiten" und scheint bei Anomalie–Rechnungen üblich zu sein [10] (Anomalie: Noether–Conti–Verletzung bei Quantisierung). Unter Variation nach A–Feldern ist der σ–Faktor in (9.1) irrelevant

$$\Gamma = \ln\Big[\det\Big(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\Big)\Big] = n\ln(\sigma) + 2NS \quad\Rightarrow\quad \delta\,\Gamma = 2N\,\delta\,S \quad . \tag{9.3}$$

9.1 δ ln (det)

Wer ein rechter Fußgänger ist, der blickt kurz auf (7.13), und läuft dann mal einfach los:

$$\begin{aligned}\Gamma \;&=\; \ln\,[\,\det(\diamond)\,] = \hat{\mathbf{Sp}}\;[\,\ln(\diamond)\,] \quad , \quad \mathbf{D}^\dagger\mathbf{D} =: \diamond \;\;,\;\; 1-\diamond =: \mho \\ &=\; \hat{\mathbf{Sp}}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mho^{\,n}\right) \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\begin{array}{ccc} & \mho_{12} & \\ \mho_{n1} & & \mho_{23} \\ & {\scriptstyle n \atop \text{Stück}} & \\ \mho_{n-1\,n} & & \mho_{34} \\ & \bullet\;\bullet\;\bullet & \end{array}\right) \quad . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Spur in boldface verweise auf rr'–indizierte Riesenmatrizen, und das Dach auf deren ab–Indizes. So steht der Index 1 z.B. für $b, \vec{r}\,'$, 2 für $c, \vec{r}\,''$ und so fort. Eine δ–Variation greift in jeden der n gleichberechtigten Eimer $\mho$:

$$\begin{aligned}\delta\,\Gamma \;&=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\,[\,\delta\,\mho_{12}\,]\;\mho_{23}\ldots\mho_{n1} \;=\; -\,[\,\delta\,\mho_{12}\,]\left(\frac{1}{1-\mho}\right)_{21} \;=\; [\,\delta\,\diamond\,]_{12}\left(\frac{1}{\diamond}\right)_{21} \\ &=\; \hat{\mathbf{Sp}}\,\Big(\Big[\,\delta(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D})\Big]\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{\dagger-1}\Big) \;=\; \hat{\mathbf{Sp}}\,\Big(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{\dagger-1}\delta(\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D})\Big) \quad . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Erfaßt die Variation nur ein D (z.B $\mathbf{D}$ selbst), dann fällt das jeweils andere (nämlich $\mathbf{D}^\dagger$) in (9.5) heraus. Wenn wir also speziell nach $A^a(\vec{r})$ ableiten, dann entsteht

$$\begin{aligned}\delta_{A^a(\vec{r})}\Gamma \;&=\; \hat{\mathbf{Sp}}\,\Big(\mathbf{D}^{-1}\delta\,\mathbf{D}\Big) \;=\; (D^{-1})_{12}(\delta\,D)_{21} \;=\; \int'\!\!\int''(D^{-1})^{bc}_{r'r''}\delta_{A^a(\vec{r})}D^{cb}_{r''r'} \\ &=\; \int'\!\!\int''(D^{-1})^{bc}_{r'r''}\;\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'')\;f^{abc}\;\delta(\vec{r}\,''-\vec{r}\,') \\ \delta_{A^a(\vec{r})}\Gamma \;&=\; f^{abc}\,(D^{-1})^{bc}_{r'\,r}\;\Big|_{\vec{r}\,'\to\vec{r}} \quad , \quad \delta_{A^{a*}(\vec{r})}\Gamma = f^{abc}\,(D^{*-1})^{bc}_{r'\,r}\;\Big|_{\vec{r}\,'\to\vec{r}} \quad . \end{aligned} \tag{9.6}$$

In der zweiten Zeile stehen zwei Deltafunktionen. Die erste ergab sich beim funktionalen Ableiten nach dem A–Feld in $D^{cb}_{r''r'} = \delta^{cb}\partial_{r''r'} + A^\bullet(\vec{r}\,'')f^{c\bullet b}\delta_{r''r'}$ ($\equiv$(7.13)). Sie ist harmlos: Integration über $\vec{r}\,''$ erlaubt. Die zweite ist jene, welche bereits vorher rechts in $D^{cb}_{r''r'}$ steht. Sie möchte die räumlichen Indizes gleich werden lassen. In der dritten Zeile zögern wir

(KKN folgend) diese Koinzidenz, welche Regularisierung erfordert, noch ein Weilchen hinaus und betrachten die Indizes an D^{-1} vorerst als verschiedene. Da Γ reell, konnte die zweite Dgl in der dritten Zeile als c.c. der ersten notiert werden. Diese c.c.–Version ist [**2.22**].

9.2 Das Inverse von D

Das in (9.6) benötigte Inverse $\boldsymbol{D^{-1}}$ ist d i e e i n e Lösung der n^2 Gleichungen

$$D^{ac}_{rr''}\,(\,?\,)^{cb}_{r''r'} \;=\; \Big(\delta^{ac}\partial + A^{ac}(\vec{r}\,)\Big)\,(\,?\,)^{cb}_{rr'} \;=\; \delta^{ab}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad \text{mit} \;\; A^{ac} := A^{\bullet} f^{a\bullet c} \quad . \tag{9.7}$$

Wir erfinden gern selber. Das Fragezeichen sollte wegen (4.3), nämlich $\partial G_{rr'} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$, etwas mit G zu tun haben. Setzen wir $\delta^{cb}G_{rr'}$ für (**?**) ein, entsteht rechts zwar $\delta\delta$ aber auch ein Zusatzterm AG. Um zu dessen Kompensation einen weiteren Term zu erhalten, versuchen wir es mit $M^{cb}(\vec{r}\,)G_{rr'}$, und das gibt rechts $(\partial M^{ab})G + M^{ab}\delta\delta + A^{ac}M^{cb}G$. Aha! Ein weiteres $(M^{-1})^{db}(\vec{r}\,')$ von rechts könnte die Dinge ins Lot bringen:

$$\Big(\delta^{ac}\partial + A^{ac}(\vec{r}\,)\Big)\,M^{cd}_{r}G_{rr'}(M^{-1})^{db}_{r'} = \Big[(\partial M)^{ad}_{r} + A^{ac}_{r}M^{cd}_{r}\Big]\;G_{rr'}(M^{-1})^{db}_{r'} + \delta^{ab}\delta_{rr'} \tag{9.8}$$

Wenn wir die „adjungierte" Matrix $\hat{M}$ mit Elementen M^{ab} finden, welche die eckige Klammer verschwinden läßt, d.h. wenn wir $\hat{A}\hat{M} = -\partial\hat{M}$ lösen können, dann ist auch das Invertierungsproblem gelöst:

$$(D^{-1})^{ab}_{rr'} = M^{ac}_{r}G_{rr'}(M^{-1})^{cb}_{r'} \quad : \quad \mathbf{D}^{-1} = \hat{M}\,G\,\hat{M}^{-1} \quad . \tag{9.9}$$

Über jene Paare von räumlichen Indizes in (9.8), (9.9) ist übrigens *nicht* zu integrieren (das letzte zu summierende Paar gab es ganz links in (9.7)).

$\hat{A}$ habe die rechts in (9.7) angegebenen Elemente. Bei $\hat{A} = -(\partial\hat{M})\hat{M}^{-1}$ handelt es sich offenbar um eine adjungierte Version der vertrauten Beziehung $A = -(\partial M)M^{-1}$.

9.3 Die adjungierte Matrix $\hat{M}$

Der Ausgangspunkt $A = -iT^aA^a = -(\partial M)M^{-1}$ ist in fundamentaler Darstellung angesiedelt. Wir nehmen ihn im Kommutator $[T^b\,,\ldots]$ und erhalten

$$A^{bc}T^c = -T^b(\partial M)M^{-1} + (\partial M)M^{-1}T^b = -T^b(\partial M)M^{-1} - M(\partial M^{-1})T^b \tag{9.10}$$

Weil $\hat{A}\hat{M} = -\partial\hat{M}$ rechts/links das gleiche unbekannte Objekt $\hat{M}$ braucht, multiplizieren wir von links mit M^{-1} und von rechts mit M :

$$A^{bc}M^{-1}T^cM \;=\; -M^{-1}T^b\partial M - (\partial M^{-1})T^bM \;=\; -\partial\; M^{-1}T^bM \quad . \tag{9.11}$$

Fast. Fundamentale Elemente lassen sich per Spurbildung beseitigen. Aber die Normierung von $\hat{M}$ wird durch (9.11) nicht festgelegt. Dazu lassen wir uns von (4.4), (4.5) $M \to 1$ bei $A \to 0$ erzählen und machen es per Forderung $M^{ab} \to \delta^{ab}$ adjungiert ebenso. Fazit:

$$\hat{M} \;:\; M^{ab} = 2\,\mathrm{Sp}\Big(T^aMT^bM^{-1}\Big) \qquad \text{erfüllt} \quad \hat{A}\hat{M} = -\partial\hat{M} \quad . \tag{9.12}$$

Wegen $(\hat{M}^\dagger)^{ab} = M^{ba\,*} = 2\,\mathrm{Sp}(M^{\dagger -1}T^a M^\dagger T^b)$ folgt nun

$$\hat{M}^\dagger \;:\; (M^\dagger)^{ab} = 2\,\mathrm{Sp}\Big(T^a M^\dagger T^b M^{\dagger -1}\Big) \quad \text{erfüllt} \quad \hat{M}^\dagger \hat{A}^\dagger = -\overline{\partial}\hat{M}^\dagger \quad . \tag{9.13}$$

Besteht $\hat{A}$ aus $A^{ab} = A^\bullet f^{a\bullet b}$, so hat $\hat{A}^\dagger$ die Elemente $(A^\dagger)^{ab} = A^{\bullet *} f^{b\bullet a} = -A^{\bullet *} f^{a\bullet b}$.

9.4 Sprung in die regularisierte Version

Daß wir uns nicht schämen. Aber die KKN–Leitlinie erlaubt es hier, das Resultat der Regularisierungs–Mühen vorwegzunehmen. Es kann nur die Greensche Funktion $G_{rr'}$ sein, welche in (9.9) unter $\vec{r}\,' \to \vec{r}$ leidet. Sie wird durch ihre regularisierte Version $\mathcal{G}_{rr'}$ zu ersetzen sein. $\vec{r}\,' \to \vec{r}$ ist dann möglich und führt auf (**Zitat** aus § 11, Gleichung (11.28))

$$\Big[D^{-1}_{r'r}\Big]_{\substack{\text{reg} \\ \vec{r}\,' \to \vec{r}}} = -\frac{\hat{A}^\dagger - (\overline{\partial}\hat{M})\,\hat{M}^{-1}}{\pi} \quad , \quad \Big[D^{*-1}_{r'r}\Big]_{\substack{\text{reg} \\ \vec{r}\,' \to \vec{r}}} = \frac{\hat{A} - \hat{M}^{\dagger -1}\,\partial\,\hat{M}^\dagger}{\pi} \quad . \tag{9.14}$$

Hiermit werden nun die Gleichungen (9.6) zu anständigen (lokalen, noch adjungiert geschriebenen) funktionalen Dgln:

$$\delta^a\Gamma = \frac{-1}{\pi}\, f^{abc}\Big(\hat{A}^\dagger - (\overline{\partial}\hat{M})\;\hat{M}^{-1}\Big)^{bc} \quad , \quad \delta^{a*}\Gamma = \frac{1}{\pi}\, f^{abc}\Big(\hat{A} - \hat{M}^{\dagger -1}\,\partial\,\hat{M}^\dagger\Big)^{bc} \quad , \tag{9.15}$$

worin natürlich δ^a für $\delta_{A^a(\vec{r})}$ steht und δ^{a*} für $\delta_{A^{a*}(\vec{r})}$. Die rechte Dgl ist das c.c. der linken. Es geht jetzt nur noch um Rückkehr zu den liebenswerten $N \times N$–Matrizen M. Aus den adjungierten Spuren in (9.15) sollen fundamentale werden.

9.5 Spur mal Spur – zurück zum Fundamentalen

Ein neckisches technisches Detail kommt bereits ins Spiel, wenn das Inverse von $\hat{M}$ zu Papier soll. Es hat sich aus $(M^{-1})^{ac}M^{cb} = \delta^{ab}$ zu ergeben. Wir r a t e n das Resultat,

$$(M^{-1})^{ac} = 2\,\mathrm{Sp}\Big(T^a M^{-1} T^c M\Big) \;=\; M^{ca} \quad , \tag{9.16}$$

und prüfen nach. Zwei fundamentale Spuren stehen da und sollen zu einer einzigen verkettet werden: *concatenation* würde Miss Maple sagen:

$$\begin{aligned}
(M^{-1})^{ac}M^{cb} \;&=\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(T^a M^{-1} T^c M\Big)\;\Big(T^c M T^b M^{-1}\Big) \\
&=\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(\Big[\,M T^a M^{-1}\Big]\,T^c\Big)\;\Big(T^c\Big\{M T^b M^{-1}\Big\}\Big) \\
&=\; 2\,[\qquad]_{\ell m}\;\underbrace{2\,T^c_{m\,\ell}\,T^c_{p\,q}}_{=\;\delta_{m\,q}\,\delta_{\ell\,p}\;-\;\frac{1}{N}\,\delta_{m\,\ell}\,\delta_{p\,q}}\{\qquad\}_{q\,p} \\
&=\; 2\,\mathrm{Sp}\Big([\qquad]\;\{\qquad\}_{q\,p}\Big) \;=\; \delta^{ab} \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned} \tag{9.17}$$

Sieh an, das unterklammerte Detail aus SU(N)–Weisheiten leistet also *concatenations*. Der $1/N$–Term gab keinen Beitrag wegen $\mathrm{Sp}([\quad]) = \mathrm{Sp}(\{\quad\}) = 0$.

Unverzüglich wenden wir uns mit Blick auf (9.15) der nächsten Verkettung zu:

$$(\overline{\partial}M^{bd})\,(M^{-1})^{dc} \;=\; 4\,\mathrm{Sp}\Big(T^b(\overline{\partial}M)T^d M^{-1} + T^b M T^d \overline{\partial}M^{-1}\Big)\;\mathrm{Sp}\Big(T^d M^{-1} T^c M\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= 4\,\mathrm{Sp}\left(M^{-1}\left[T^b\overline{\partial}M - (\overline{\partial}M)M^{-1}T^bM\right]T^d\right)\mathrm{Sp}\left(T^dM^{-1}T^cM\right)\\
&= 2\,\mathrm{Sp}\left(\left[T^b(\overline{\partial}M)M^{-1} - (\overline{\partial}M)M^{-1}T^b\right]T^c\right)\\
&= 2\,\mathrm{Sp}\left(\left[T^c,T^b\right](\overline{\partial}M)M^{-1}\right) = -2\,i\,f^{abc}\,\mathrm{Sp}\left(T^a(\overline{\partial}M)M^{-1}\right) \quad ,\\
(M^{\dagger-1})^{bd}\,\partial\,(\hat{M}^\dagger)^{dc} &= \quad \ldots \quad = -2\,i\,f^{abc}\,\mathrm{Sp}\left(T^aM^{\dagger-1}\partial M^\dagger\right) \quad . \qquad (9.18)
\end{aligned}$$

Es ist hingegen recht trivial, wie die A–Terme in (9.15) zu einer Spur werden:

$$A^{bc} = A^a f^{bac} = -2if^{abc}\,\mathrm{Sp}\,(T^aA) \quad , \quad (A^\dagger)^{bc} = -A^{\bullet *}f^{b\bullet c} = -2if^{abc}\,\mathrm{Sp}\left(T^aA^\dagger\right) \quad . \qquad (9.19)$$

An dieser und der vorigen Gleichung gefallen zwei Dinge. Sie enthalten nur noch eine fundamentale Spur. Und endlich ist das zweite f zu sehen, welches in (9.15) per $f^{abc}f^{bc\bullet} = N\delta^{a\bullet}$ aus Γ einen Vorfaktor N abspalten wird. Wir setzen (9.19), (9.18) in (9.15) ein und erhalten

$$\delta^a\Gamma = 2N\frac{i}{\pi}\,\mathrm{Sp}\left(T^a[A^\dagger - (\overline{\partial}M)M^{-1}]\right) \;,\; \delta^{a*}\Gamma = -2N\frac{i}{\pi}\,\mathrm{Sp}\left(T^a[A - M^{\dagger-1}\partial M^\dagger]\right) \;. \qquad (9.20)$$

Die Dgln für das in (9.1) eingeführte Funktional S sind wegen (9.3) ($\delta\Gamma = 2N\delta S$) einfach die obigen beiden ohne $2N$–Vorfaktor. Da Γ reell, ist erneut die zweite Dgl das c.c. der ersten. Erst am Ende dieses langen Abschnittes wird klar, weshalb (s. 9.8–Überschrift) wir artig diese Spiegelbilder mit uns herumschleppen. (9.20) rechts ist [**2.23**].

9.6 $\quad S = S_1 + S_2$: die Dgln für S_2

Umformulieren, jetzt noch einmal, dann noch einmal: mit welchem Ziel? Der Leser mag ruhig einmal vorausschauen auf die erste Gleichung in § 10. $S(H)$ ist das Ziel. Er mag auch bitte etwas von der Mühsal ermessen, den hier dokumentierten (idealen?) Weg zu finden. Es war wie bei einer Schachpartie: drei gute Züge, auf jeden gibt es drei weitere und so fort. Die nächsten Schritte bringen zwei neue Buchstaben (F, Ω), beide nur vorübergehend. Nein, Protest unzulässig, Abkürzungen machen Strukturen sichtbar.

Neben den A's gibt es in (9.20) Bildungen mit der „falschen" Differentiation. Sie bekommen den Namen F:

$$\Big(\,A = -\,(\partial M)\,M^{-1} \;\; : \Big) \qquad F := -\left(\overline{\partial}M\right)M^{-1} \quad , \quad F^\dagger = -M^{\dagger-1}\partial M^\dagger \quad . \qquad (9.21)$$

Für das folgende ist es recht gescheit, die Generatoren T^a in (9.20) als Ableitungen zu schreiben, nämlich mittels $T^a = i\int\delta^aA$ und $T^a = -i\int\delta^{a*}A^\dagger$. Damit haben wir

$$\delta^aS = -\frac{1}{\pi}\int\mathrm{Sp}\Big(\left[A^\dagger + F\right]\delta^aA\Big) \quad , \quad \delta^{a*}S = -\frac{1}{\pi}\int\mathrm{Sp}\Big(\left[A + F^\dagger\right]\delta^{a*}A^\dagger\Big) \quad . \qquad (9.22)$$

Das sind $2*n$ funktionale Dgln für S. $\int$ steht für $\int d^2r$ über die ganze 2D Ebene. $\vec{r}$ ist jetzt Integrationsvariable. Also lesen wir δ^a als $\delta_{A^a(\vec{r}_0)}$. In (9.22) darf δ^aA durch $\delta^a[A + F^\dagger]$ ersetzt werden, und $\delta^{a*}A^\dagger$ durch $\delta^{a*}[A^\dagger + F]$, weil

$$A\;,\;F \quad \text{nur von} \quad A^a \qquad \text{und} \qquad A^\dagger\;,\;F^\dagger \quad \text{nur von} \quad A^{a*}$$

abhängen. Wer hieran zweifelt, blicke auf (4.5) zurück, wonach nicht nur M sondern auch $\overline{\partial}M$ eine Entwicklung (nur) nach A^a–Feldern hat. Die nächste Definition, nämlich $\Omega := A + F^\dagger$, macht (9.22) so kurz,

$$\delta^a(2\pi S) = \int \mathrm{Sp}\left(-2\,\Omega^\dagger \delta^a \Omega\right) \quad , \quad \delta^{a*}(2\pi S) = \int \mathrm{Sp}\left(-2\,\Omega \delta^{a*} \Omega^\dagger\right) \quad , \tag{9.23}$$

daß man bereits zu raten beginnen möchte. Aber ein $\Omega\Omega^\dagger$ unter $\int \mathrm{Sp}$ taugt nur für eine Abspaltung:

$$2\pi S \;=\; 2\pi S_1 + 2\pi S_2 \qquad , \qquad 2\pi S_1 \;:=\; \int \mathrm{Sp}\left(-\Omega\Omega^\dagger\right) \quad . \tag{9.24}$$

Ausblick: S_1 wird der „harmlose" erste Term in der gesuchten Wirkung bleiben und S_2 zur WZW–Wirkung werden. Um die funktionalen Dgln separat für den Anteil $S_2 = S - S_1$ zu ergründen, sind lediglich die Dgln $\delta(2\pi S_1) \;=\; \int \mathrm{Sp}\left(-\Omega^\dagger \delta\Omega - \Omega\delta\Omega^\dagger\right)$ von (9.23) zu subtrahieren:

$$\delta^a(2\pi\, S_2) = \int \mathrm{Sp}\Big(\Omega\delta^a\Omega^\dagger - \Omega^\dagger\delta^a\Omega\Big) \quad , \quad \delta^{a*}(2\pi\, S_2) = \int \mathrm{Sp}\Big(\Omega^\dagger\delta^{a*}\Omega - \Omega\delta^{a*}\Omega^\dagger\Big) \quad . \tag{9.25}$$

9.7 Nur noch Variable $\boldsymbol{H}$

Es folgt eine landschaftlich schöne Strecke. Wenn Γ und S als eichinvariante Bildungen nur von $H = M^\dagger M$ abhängen (sollten), dann erwarten wir, daß die Dgln neben H nur $\delta^a H$ bzw. $\delta^{a*} H$ enthalten:

$$\begin{aligned}
\Omega \;&=\; A + F^\dagger = -\,\Big[(\partial M)M^{-1} + M^{\dagger-1}(\partial M^\dagger)\Big] \\
&=\; -M^{\dagger-1}\,\Big[M^\dagger\partial M + (\partial M^\dagger)M\Big]\; M^{-1} = -M^{\dagger-1}(\partial H)M^{-1} \quad , \\
\Omega^\dagger \;&=\; -M^{\dagger-1}(\overline{\partial}H)M^{-1} \;=\; M(\overline{\partial}H^{-1})M^\dagger \quad .
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Unverzüglich wird der Anteil S_1, (9.24), zu einem rein H–ischen Objekt:

$$2\pi\, S_1 = \int \mathrm{Sp}\Big((\partial H)\,\overline{\partial}H^{-1}\Big) \quad . \tag{9.27}$$

Für S_2 haben wir nur Dgln. Wie sie sich mittels (9.26) H–ifizieren, sei an der linken Dgl (9.25) vorgeführt:

$$\begin{aligned}
\delta^a(2\pi\, S_2) \;&=\; \int \mathrm{Sp}\left(M^{\dagger-1}(\partial H)M^{-1}\delta^a\,\Big[M^{\dagger-1}(\overline{\partial}H)M^{-1}\Big] \;-\; \mathrm{dito}_{\partial\leftrightarrow\overline{\partial}}\right) \\
&=\; \int \mathrm{Sp}\left((\partial H)H^{-1}\delta^a\,\Big[(\overline{\partial}H)H^{-1}\Big] \;-\; \mathrm{dito}_{\partial\leftrightarrow\overline{\partial}}\right) \\
&=\; \frac{i}{2}\int \mathrm{Sp}\left(H_{,2}H^{-1}\delta^a\,\Big[H_{,1}H^{-1}\Big] \;-\; \mathrm{dito}_{1\leftrightarrow 2}\right) \\
&=\; \frac{i}{2}\int \mathrm{Sp}\left(H^{-1}H_{,2}H^{-1}\delta^a H_{,1} - H^{-1}H_{,2}H^{-1}H_{,1}H^{-1}\delta^a H \;-\; \mathrm{dito}_{1\leftrightarrow 2}\right) \\
&=\; \frac{i}{2}\int \mathrm{Sp}\Big(\varphi^a\,\left[\,X_1X_2 - X_2X_1\,\right] \,+ \partial_1(X_2\varphi^a) - \partial_2(X_1\varphi^a)\Big) \quad .
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Das Ziel ist erreicht: nur H und $\delta^a H$. In der ersten Zeile durften wir $M^{\dagger-1}$ an δ^a vorbei schieben. Die dritte Zeile entstand per „ $\partial\overline{\partial} - \overline{\partial}\partial = \frac{1}{4}(\partial_1 + i\partial_2)(\partial_1 - i\partial_2) - \frac{1}{4}(\partial_1 - i\partial_2)(\partial_1 +$

$i\partial_2) = \frac{i}{2}\,[\,\partial_2\,\partial_1 - \partial_1\,\partial_2\,]$ " . Die letzte Zeile in (9.28) wurde erreicht mit naheliegenden Abkürzungen für die zwei rein H–ischen Bildungen

$$X_j := H^{-1}H_{/j} \quad (j=1,2) \quad \text{und} \quad \varphi^a := H^{-1}\delta^a H \tag{9.29}$$

einerseits, und zum anderen mit der Umformung

$$\begin{aligned} X_2H^{-1}\delta^a H_{/1} &= X_2H^{-1}\partial_1\delta^a H \;=\; \partial_1(X_2\varphi^a) - (H^{-1}H_{/2}H^{-1})_{/1}\delta^a H \\ &= \partial_1(X_2\varphi^a) - H^{-1}H_{/2/1}\,\varphi^a + [\,X_1X_2 + X_2X_1\,]\,\varphi^a \quad , \end{aligned}$$

wonach 1-2–symmetrische Terme unter dito entfallen.

9.8 Stokes — ein gemeinsames $\boldsymbol{\delta}$

Das Resultat (9.28) enthält die Drittkomponente einer Rotation. Die aus analoger Rechnung folgende „Spiegelbild–Dgl" fügen wir jetzt hinzu:

$$\begin{aligned} \delta^a S_2 &= \frac{i}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\varphi^a[X_1X_2 - X_2X_1] + \Big[\nabla\times\Big(X_1\varphi^a \;,\; X_2\varphi^a \;,\; \ldots\Big)\Big]_3\Big) \\ \delta^{a*} S_2 &= \frac{i}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\psi^a[X_1X_2 - X_2X_1] - \Big[\nabla\times\Big(X_1\psi^a \;,\; X_2\psi^a \;,\; \ldots\Big)\Big]_3\Big) \end{aligned} \tag{9.30}$$

mit $\psi^a := H^{-1}\delta^{a*}H$. Ist da sonst noch ein kleiner Unterschied?! Im je ersten Term hat sich lediglich δ^a durch δ^{a*} ersetzt. Hier dürfen wir also ein „gemeinsames δ" einführen: δ ist wahlweise $\delta_{A^a(\vec r_0)}$ oder $\delta_{A^{a*}(\vec r_0)}$. Statt φ^a, ψ^a genügt ein $\varphi := H^{-1}\delta H$. Aber in den Rotationstermen wird solcherlei durch den Vorzeichenunterschied unterbunden.

Rotation ruft nach Stokes (wiewohl hier nur für ebene Fläche). Es ist eine delikate Frage, ob nach Integration die Randterme entfallen dürfen. φ ist Funktion von zwei Orten, von $\vec r$ (wovon H abhängt und worauf $\nabla\times$ wirkt) und von $\vec r_0$, die Marke an $\delta^a = \delta_{A^a(\vec r_0)}$. Wie (4.4), (4.5) zeigt, sind die A–Felder, von denen H (neben $\vec r$) funktional (auch noch) abhängt, sämtlich überintegriert: sie sitzen bei $\vec r\,'$. δ^a zwingt ein $\vec r\,'$ auf $\vec r_0$. Und wenn sich nun $\vec r$ weit von $\vec r_0$ entfernt, dann sollten die Greensfunktionen G in (4.5) für Abfall nach außen sorgen.

$$\text{———} \quad \vec r \;\; \text{Rand} \quad \text{————} \quad A(\vec r\,') \quad \text{——} \quad \delta_{A^a(\vec r_0)} \quad \text{————} \quad \text{Rand} \;\; \vec r \quad \text{———}$$

Fallen die A–Felder selbst nach außen ab (H und $M \to$ const), dann helfen auch die X_j–Faktoren mit. Unter solcherlei Unsicherheiten und Vorbehalten können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \delta\,S_2 &= \frac{i}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\varphi\,[X_1X_2 - X_2X_1]\Big) \quad , \quad \varphi = H^{-1}\delta H \\ &= \frac{i}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(H^{-1}\delta H\,\Big[H^{-1}H_{/1}H^{-1}H_{/2} - H^{-1}H_{/2}H^{-1}H_{/1}\Big]\Big) \quad . \end{aligned} \tag{9.31}$$

Weil wir S_2 noch nicht kennen, ist (9.31) d a s Resultat des gesamten langen § 9. Für späteren Gebrauch, nämlich in § 12.2, sollten wir hier aber auch noch δS_1 und δS H–isch notieren. Dazu nehmen wir (9.23) zur Hand, setzen den H–isierer (9.26) ein und erhalten

$$\delta S_1 = \frac{1}{4\pi}\int \Big\{\,\mathrm{Sp}\Big(\varphi\,[\,\partial_1X_1 + \partial_2X_2\,]\Big) + \partial_1\,\mathrm{Sp}\,(\varphi X_1) + \partial_2\,\mathrm{Sp}\,(\varphi X_2)\,\Big\} \quad . \tag{9.32}$$

Noch vor partieller Integration hat also δS_1 bereits ein gemeinsames δ. Statt Stokes beseitigt diesesmal der ebene Gauß die reinen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\varphi\,\Big[\partial\overline{X}+\overline{\partial}X\Big]\,\Big) \qquad , \qquad X := H^{-1}\partial H \ \ , \ \ \overline{X} := H^{-1}\overline{\partial}H \\
\delta S_2 &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\varphi\,\Big[\overline{X}X - X\overline{X}\Big]\,\Big) \\
\hline
\delta S &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\varphi\,\Big[\partial\overline{X}+\overline{\partial}X+\overline{X}X-X\overline{X}\Big]\,\Big) \;=\; \frac{1}{\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,\varphi\,\partial\overline{X}\Big) \quad , \qquad (9.33)
\end{aligned}$$

denn

$$\overline{\partial}X+\overline{X}X = \overline{\partial}\,\Big[H^{-1}\partial H\Big]+\overline{X}\,X \;=\; H^{-1}\partial\overline{\partial}H \;=\; \partial\overline{X}+X\overline{X} \quad . \qquad (9.34)$$

(9.33) zeigt einmal mehr, daß der WZW–Term S_2 im gegenwärtigen Kontext eine ganz bestimmte Stärke braucht, um die Dgln zu erfüllen, nämlich genau den in (10.1) angegebenen Vorfaktor.

10 Die Lösung $S(H)$ der Dgln

Selber finden ist zwar schöner, aber der Blick auf das angebliche Resultat [**2.21**] ist jetzt allzu unwiderstehlich. S ist die hermitesche WZW–Wirkung

$$\boxed{S = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big((\partial H)\overline{\partial}H^{-1}\Big) + \frac{i}{12\pi}\int_V \epsilon^{jk\ell}\mathrm{Sp}\Big(H^{-1}(\partial_j H)H^{-1}(\partial_k H)H^{-1}(\partial_\ell H)\Big)\ .} \qquad (10.1)$$

Der erste Term ist ein alter Bekannter, S_1 nämlich: (9.17). Der zweite Term — ebenfalls rein H–isch — ist also S_2 und hat die Dgln (9.31) zu erfüllen. Beide Terme stehen übrigens mit unserer Nebenbedingung (9.2) in Einklang: $H \to$ const gibt Null (vorbehaltlich Integrale–Existenz).

Obiges S_2 ist ein Volumenintegral. Wie bitte ?! H ist auf xy–Ebene definiert. Auf dieser leben wir und können nicht anders. Offenbar hat irgendein Bösewicht unseren H's eine zusätzliche Abhängigkeit von der Variablen z verpaßt. So schreibt denn auch Dimitra Karabali in ihrem TFT'98–Proceedings–Artikel [11] daß
„*the integrand thus requires an extension of the matrix field H into the interior of V, but physical results do not depend on how this extension is done. Actually for the special case of hermitian matrices, the second term can also be written as an integral over* [2D] *spatial coordinates only.*" — Aha — ? — .

An dieser Stelle steht eine böse Falle bereit. Das V–Integral macht nur Sinn, so meint man wohl leichtfertig, wenn $\int_V$ unverzüglich mittels Gauß in ein Oberflächenintegral $\int_{\partial V}$ verwandelt wird (ein skalarer Integrand läßt sich stets als $\nabla\cdot\vec{C}$ schreiben). Auf dieser Oberfläche sollten sodann die skalaren Werte S_2 liegen, welche die Dgln (9.31) erfüllen. Es hat lange gedauert, ehe die soeben genannte Leichtfertigkeit überwunden war. Man soll nämlich (zumindest geht es dann) e r s t funktional ableiten und d a n a c h Gauß bedienen. Hinter dieser Anmerkung verbirgt sich die (unvermindert bohrende) Frage nach einem anderen Weg. Wir gehen jetzt da entlang, wo es nicht weiter anstrengt.

Die hermiteschen Matrizen H mögen also auch (irgendwie) von z abhängen. Neben X_1, X_2 gibt es nun auch noch ein $X_3 = H^{-1}H_{/3}$. In der epsilon–Tensor–Sprache von (10.1) stehen sechs Terme unter der Spur. Aber zyklische Vertauschungen unter derselben reduzieren auf zwei :

$$S_2 = \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\Big(X_3\, [\, X_1X_2 - X_2X_1\,]\, \Big) \quad . \tag{10.2}$$

Es gibt nur noch ein δ, und dessen Marke $\vec{r}_0$ liege irgendwo in V. Wir sehen nach, ob (10.2) die Dgln (9.31) erfüllt (Erinnerung : $\varphi = H^{-1}\delta H$) :

$$\begin{aligned}
\delta\, S_2 \;&=\; \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\Big(\, [\, X_1X_2 - X_2X_1\,]\; \delta X_3 \;\; + \;\; \text{zyklisch}\;\Big) \\
&\qquad\qquad \delta X_3 = \delta(H^{-1}H_{/3}) \;=\; X_3\varphi - \varphi X_3 + \partial_3\varphi \quad , \\
&\qquad\qquad \Big[[X_1, X_2]\,,\, X_3\Big] \;+\; \text{zyklisch} \;=\; 0 \quad \text{(Jacobi–Identität)} \\
&=\; \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\Big(\, [\, X_1, X_2\,]\; \partial_3\varphi \;\;+\;\; \text{zyklisch}\;\Big) \\
&=\; \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\Big(\partial_3\,\varphi\, [\, X_1, X_2\,] \;\;+\;\; \text{zyklisch} \;\;-\;\; \varphi\,\Big\{\,\partial_3\, [\, X_1, X_2\,] \;\;+\;\text{zyklisch}\;\Big\}\,\Big) \\
&\qquad\qquad X_1X_2 - X_2X_1 \;=\; \partial_2 X_1 - \partial_1 X_2 \qquad \Rightarrow \quad \Big\{ \qquad \Big\} \;=\; 0 \\
&=\; \frac{i}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\Big(\; \mathrm{Sp}\,(\varphi[X_2, X_3]) \;\;,\; \mathrm{Sp}\,(\varphi[X_3, X_1]) \;\;,\; \mathrm{Sp}\,(\varphi[X_1, X_2]) \;\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \textbf{jetzt erst Gauß :} \\
&=\; \frac{i}{4\pi}\int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\Big(\; \mathrm{Sp}\,(\varphi\,[X_2, X_3]) \;\;,\; \mathrm{Sp}\,(\varphi\,[X_3, X_1]) \;\;,\; \mathrm{Sp}\,(\varphi\,[X_1, X_2]) \;\Big) \\
\delta\, S_2 \;&=\; \frac{i}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,\varphi\,[\, X_1X_2 - X_2X_1\,]\,\Big) \quad \text{auf Deckfläche ,} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Die Dgln sind erfüllt. Dieser § hat damit seiner Überschrift schon genüge getan. Das Fragezeichen hinter obigem Karabali–Zitat bezieht sich auf die Behauptung, S_2 lasse sich explizit als e b e n e s Integral aufschreiben. Aber das will uns partout nicht gelingen.

Rückblick und Fazit

Es ging darum — über fünf Abschnitte — die Wellenfunktionen ψ der Schrödinger–funktionalen Quantenmechanik richtig normieren zu können. Die reellen Variablen leben auf den „Feldachsen". Schon in (6.2) hatten wir einmal das Skalarprodukt notiert und mit Fragezeichen das Problem markiert. Daß das dortige Maß $d\mu(\mathcal{A})$ durch $d\mu(\mathcal{C})$ zu ersetzen ist, war bereits in § 6 verstanden : Integration über unphysikalische Freiheitsgrade einfach weglassen. §§ 7 und 8 bescherten uns dann die eingerahmte Gleichung (8.13). Und von da an haben wir uns nur noch mit der dortigen Determinante herumgeschlagen. Fazit :

$$\int \psi_1^*\psi_2 \;=\; \int d\mu(\mathcal{C})\;\; \psi_1^*(H)\,\psi_2(H) \;\;=\; \int d\mu(\mathcal{H})\; e^{2NS(H)}\;\; \psi_1^*(H)\,\psi_2(H) \quad . \tag{10.4}$$

(10.4) ist [**2.25**]. KKN: *This formula shows that all matrix elements in (2+1)–dimensional SU(N) gauge theory can be evaluated as correlators* des hermiteschen WZW–Modells. Es gibt nur noch n „Feldachsen”, nämlich eine für jeden reellen Parameter ω^a (nichts gegen Blick auf (8.14) und $H = \rho^2$). Eine Vorgabe aller ω^a legt nämlich eine bestimmte hermitesche eins–determinantische Matrix H fest. Ab sofort können wir Wellenfunktionen ψ normieren, mittels (10.4) nämlich. Unter Funktionen ψ erlaubt die Quantenmechanik bekanntlich nur die normierbaren. Und dann gibt es da noch die Bewegungsgleichung $i\hbar\dot{\psi} = \mathbf{H}\psi$. Mindestens auch noch zum Hamilton–Operator $\mathbf{H}$ im Schrödinger–Bild sollte dieses Traktat etwas sagen: § 12 .

Polyakov–Wiegmann–Identität

Die Wirkung $S(H)$, (10.1), erfüllt eine neckische Beziehung für Produkt–Argument. In [12] wird sie eine *remarkable identity* genannt. Ihre dreizeilige Begründung ist anstrengend, und das in [12] angebene Resultat ist falsch. Manche Autoren sollten das Vordiplom zu wiederholen haben. Als [**3.2**] ist die Identität auch bei KKN falsch angegeben. Wir stellen richtig:

$$S(AB) = S(A) + S(B) - \frac{1}{\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\, [\,\partial B\,]\; B^{-1}A^{-1}\,\overline{\partial} A\Big) \quad . \tag{10.5}$$

Um (10.5) herzuleiten, schreiben wir wieder $S = S_1 + S_2$ und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} S_1(AB) &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,[\,\partial AB\,]\;\overline{\partial}\,B^{-1}A^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,[\,(\partial A)B + A\,\partial B\,]\;\Big[(\overline{\partial}B^{-1})A^{-1} + B^{-1}\overline{\partial}A^{-1}\Big]\,\Big) \\ &= S_1(A) + S_1(B) - \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,(\overline{\partial}B)B^{-1}A^{-1}\partial A + (\partial B)B^{-1}A^{-1}\overline{\partial}A\,\Big) \\ &= S_1(A) + S_1(B) - \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,b_1a_1 + b_2a_2\,\Big) \quad , \quad \begin{array}{l} a_j := A^{-1}A_{\prime j} \\ b_j := B_{\prime j}\,B^{-1} \end{array} \quad . \end{aligned} \tag{10.6}$$

Auch im Term S_2 ersetzen wir H durch AB. In der Version (10.2) ist folglich $X_j = B^{-1}A^{-1}(AB)_{\prime j} = B^{-1}(a_j + b_j)B$ einzusetzen:

$$\begin{aligned} S_2(AB) &= \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\Big(\,X_3\;[\,X_1X_2 - X_2X_1\,]\,\Big) \\ &= \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\;[\;(a_3+b_3)(a_1+b_1)(a_2+b_2) \;\;-\;\; \mathrm{dito}_{\text{antizyklisch}}\,] \\ &= S_2(A) + S_2(B) + \frac{i}{4\pi}\int_V \mathrm{Sp}\Big[\;\text{Mischterme}\;\Big] \quad . \end{aligned} \tag{10.7}$$

Die Mischterme gruppieren sich in solche mit einem b mal Kommutator zweier a’s und solche mit einem a und b–Kommutator. Die drei a–Kommutatoren bilden die Komponenten von $\vec{a}\times\vec{a}$. Unter der Spur steht schließlich [Mischterme] $= \vec{b}\,(\vec{a}\times\vec{a}) + (\,\vec{b}\times\vec{b}\,)\vec{a}$. Hiermit lassen sich nun — darum hatten wir gebangt — die Mischterme als Divergenz schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla\times\,\vec{b} = \nabla\times\Big[\,(\nabla B)B^{-1}\Big] &= \vec{b}\times\vec{b} \quad , \quad \nabla\times\vec{a} = \nabla\times\Big[\,A^{-1}\nabla A\Big] = -\,\vec{a}\times\vec{a} \quad , \\ \Big[\;\text{Mischterme}\;\Big] &= (\nabla\times\,\vec{b}\,)\vec{a} - \,\vec{b}\,(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\,\vec{b}\times\vec{a}) \quad , \end{aligned} \tag{10.8}$$

und das macht ihn glücklich, den Meister Gauß. Auf der Deckfläche des Volumens V entsteht $(\vec{b} \times \vec{a})_3 = b_1 a_2 - b_2 a_1$ und insgesamt

$$S_2(AB) = S_2(A) + S_2(B) - \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{Sp}\Big(i\, b_2 a_1 - i\, b_1 a_2 \Big) \quad . \tag{10.9}$$

Addition von (10.9) zu (10.6) gibt

$$S(AB) = S(A) + S(B) - \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{Sp}\Big(\, (b_1 + i b_2)\,(a_1 - i a_2) \, \Big) \;\equiv\; (10.5) \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{10.10}$$

Sagt doch der Meister Ketov so nebenbei, jaja, als Fußgänger brauche man Gauß, aber die elegante Herleitung sei jene (schreckliche) in [12]. Im nächsten Abschnitt werden wir auf $S(ABC)$ zu blicken haben. Mittels (10.5) folgt

$$\begin{aligned} S(ABC) \;&=\; S(A) + S(B) + S(C) - \frac{1}{\pi} \int \mathrm{Sp}\Big(\\ (\partial C) C^{-1} B^{-1} A^{-1} (\overline{\partial} A) B \;&+\; (\partial C) C^{-1} B^{-1}\, \overline{\partial} B \;+\; (\partial B) B^{-1} A^{-1}\, \overline{\partial} A \;\Big) \quad . \end{aligned} \tag{10.11}$$

Um dies (insbesondere den Vorfaktor $-1/\pi$) irgendwie zu testen, setzen wir $ABC = HH^{-1}H$, verifizieren (Übung) die Eigentümlichkeiten

$$S_1(H^{-1}) \;=\; S_1(H) \qquad , \qquad S_2(H^{-1}) \;=\; -\, S_2(H) \tag{10.12}$$

und erhalten wunschgemäß $3S_1 + S_2 - 2S_1 = S$ auf der rechten Seite von (10.11).

11 Regularisierung

Im Abschnitt 9.4 hatten wir den Schritt zur regularisierten inversen D–Matrix (9.14) per Zitat erledigt. Es ist an der Zeit, diesen Verstoß gegen die guten Sitten endlich auszuwetzen. In den Dgln für Γ, (9.6), war $\vec{r}\,' \to \vec{r}$ auszuführen. Aber dieser limes g e h t s o n i c h t , weil gemäß (9.9) die Greensche Funktion an ihr pathologisches Argument Null gerät.

An die Regularisierung sind mehrere Ansprüche zu stellen. Sie hat zum einen eichinvariant zu sein, wird also H's gegenüber M's favorisieren. Es gibt aber noch eine andere R e d u n d a n z , welche sie respektieren sollte, und dieser sei der nächste Unterabschnitt gewidmet.

11.1 Holomorphe Invarianz

Dieser Terminus dürfte von KKN erfunden sein (*we shall refer to ... as ...*). Der zugehörigen Freiheit waren wir schon einmal begegnet, als die Inhomogenität in (4.4) auf 1 festgelegt wurde. Stattdessen war dort eine beliebige von $\overline{z} = x + iy$ abhängige Matrix $\overline{V}$ erlaubt. Läßt man sämtliche solche Inhomogenitäten zu, dann ist einem Element A aus $\mathcal{A}$ ein ganzer Unterraum $M\,\overline{V}$ zugeordnet (M in SL(N,C), aber $M\overline{V}$ nicht mehr), denn

$$M \to M\,\overline{V} \qquad \text{läßt} \qquad A = -(\partial M)\, M^{-1} \;\to\; -\Big(\partial M \overline{V}\Big)\; \overline{V}^{-1} M^{-1} = A \quad , \tag{11.1}$$

unverändert, weil $\partial\overline{V}(\overline{z}) = 0$, s. (3.12). Keine Physik sollte davon abhängen, mit welchem $\overline{V}$ auf Erde, Mond oder Neptun gearbeitet wird.

Die Wirkung $\boldsymbol{S(H)}$ ist holomorph invariant. Mit $M \to M\overline{V}$ geht $H = M^\dagger M$ in $H \to VH\overline{V}$ über, wobei $V := \overline{V}^\dagger$ nur von $z = x - iy$ abhängt: $\overline{\partial} V(z) = 0$. Die Frage ist somit, ob $S(VH\overline{V})$ mit $S(H)$ übereinstimmt — womit bereits klar ist, weshalb wir im vorigen Abschnitt die Beziehung (10.11) vorbereitet hatten. Die drei dort unter Spur ausgeschriebenen Terme verschwinden wegen $\partial C = \partial\overline{V} = 0$ und/oder $\overline{\partial} A = \overline{\partial} V = 0$. Jetzt stören nur noch $S(V)$ und $S(\overline{V})$. $S_1(V)$ und $S_1(\overline{V})$ verschwinden, weil darin V bzw. $\overline{V}$ je einmal die „falsche Differentiation" erleiden. Zu $S_2(V)$ sehen wir uns in (10.2) die Bildung

$$\begin{aligned} [\, X_1 X_2 - X_2 X_1 \,] &= \left[V^{-1} V_{/1} V^{-1} V_{/2} - V^{-1} V_{/2} V^{-1} V_{/1} \right] \\ &= -i \left[V^{-1} V' V^{-1} V' - V^{-1} V' V^{-1} V' \right] = 0 \end{aligned} \tag{11.2}$$

an. Analog verschwindet auch $S_2(\overline{V})$. Ergo $S(VH\overline{V}) = S(H)$, q.e.d.

Die Greensche Funktion wird Matrix. Die Leute auf dem Mond (L wie Luna) stellen das Feld A per $A = -(\partial L)L^{-1}$ dar und benutzen zur Auflösung die Inhomogenität $\overline{V}$ statt 1, d.h. sie schreiben ($G_{rr'} = -G_{r'r}$ ausnutzend)

$$L = \overline{V} + \int' (AL)_{r'} G_{r'r} \quad \text{statt} \quad M = 1 + \int' (AM)_{r'} G_{r'r} \tag{11.3}$$

auf. Wir multiplizieren unsere Igl (die irdische in (11.3) rechts) mit $\overline{V}$ von rechts,

$$M\overline{V} = \overline{V} + \int' (AM\overline{V})_{r'} \; \overline{V}_{r'}^{-1} G_{r'r} \overline{V}_r \quad ,$$

und sehen, daß uns die beiden Handgriffe

$$\begin{aligned} & M \to M\,\overline{V} && \text{und zugleich} && G_{rr'} \to \overline{V}_r^{-1} G_{rr'} \overline{V}_{r'} =: \widetilde{G}_{rr'} \\ \text{bzw.}\quad & M^\dagger \to V\,M^\dagger && \text{und zugleich} && \overline{G}_{rr'} \to V_r\, \overline{G}_{rr'} V_{r'}^{-1} \end{aligned} \tag{11.4}$$

in das Reich der Lunasen beamen (KKN verwirren hier, weil sie $\overline{G} \to$ richtig, aber $G \to$ falsch angeben). Übrigens ist auch $\widetilde{G}_{rr'}$ eine Greensche Funktion, denn $\partial\widetilde{G}_{rr'} = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$. Aus Spaß an der Freude gehen wir noch auf den Neptun, $A = -(\partial N)N^{-1}$, wo die Leute mit Inhomogenität $\overline{V}$ arbeiten und mit $\overline{U}_r G_{rr'} \overline{U}_{r'}^{-1}$ als Green:

$$N = \overline{V} + \int' (AN)_{r'}\, \overline{U}_{r'} G_{r'r} \overline{U}_r^{-1} \quad .$$

Jetzt führt Multiplikation mit $\overline{U}$ von rechts auf die Luna–Gleichung zurück, nämlich mit $L = N\overline{U}$ und Inhomogenität $\overline{VU}$. Alles in Ordnung.

Wir tragen noch nach, wie $\widetilde{G}_{rr'}$ in adjungierter Darstellung aussieht, d.h. als ab–Matrix:

$$G_{rr'}\,\delta^{ab} \to (\overline{V}_r^{-1})^{ac} G_{rr'} (\overline{V}_{r'})^{cb} =: (\widetilde{G}_{rr'})^{ab} \quad . \tag{11.5}$$

Um sich dies herzuleiten, wiederholt man am besten die Schritte von (11.3) bis (11.4), aber in adjungierter Darstellung.

Das Integrations–Volumenelement $d\mu(\mathcal{H})$ ist holomorph invariant. Daß dem so ist, sei *easily checked*, sagen KKN. Wir blicken dazu auf (8.10), d.h. auf $ds^2_{\mathcal{H}} = 2\int \mathrm{Sp}(H^{-1}\delta H H^{-1}\delta H)$. Vermutlich ist nun zu sagen, daß man mit einer f e s t e n Inhomogenität $\overline{V}$ (bzw V) zu arbeiten habe (man ist entweder auf Neptun, Mond, oder hinieden). Wenn aber die Variationen kein $\overline{V}$ oder V erfassen, dann fallen sie in der Tat aus (8.10) heraus — und aus $d\mu(\mathcal{H})$ ebenso.

Die Operatoren p^a und $\overline{p}^a$ spalten eine Matrix ab. Zum einen, um den Laplace–Operator auf $\mathcal{C}$ zu konstruieren [3], und zum anderen weil hilfreich beim anstehenden Geschäft der Regularisierung d e f i n i e r e n KKN in [**2.34**] die folgenden beiden Operatoren p :

$$\delta^a \;=:\; M_r^{ab} \int' G_{rr'} p^b_{r'} \quad , \quad \delta^{a*} \;=:\; -\,(M_r^\dagger)^{ba} \int' \overline{G}_{rr'} \overline{p}^b_{r'} \quad . \tag{11.6}$$

(Zur Erinnerung: $\delta^a = \delta_{A^a(\vec{r}\,)}$.) Wir lösen diese Gleichungen nach p auf (z.B. die erste per Anwenden von $\hat{M}^{-1}$ und sodann ∂_r):

$$p^a_r = \partial_r\,(M_r^{-1})^{ac}\,\delta^c_r \quad , \quad \overline{p}^a_r = -\overline{\partial}_r\,(M_r^\dagger)^{ac}\,\delta^{c*}_r \quad . \tag{11.7}$$

Die Orts–Marken sind angegeben, um deutlich zu machen, auf welche zwei Abhängigkeiten ∂ bzw. $\overline{\partial}$ wirken. Beim Umsteigen nach Luna widerfährt den p's folgendes:

$$p^a \;\to\; (\overline{V}^{-1})^{ab} p^b \qquad , \qquad \overline{p}^a \;\to\; V^{ab}\overline{p}^b \quad . \tag{11.8}$$

Wir leiten dies für p^a her (wofür KKN's Angaben nicht richtig sind). A^a kennt keinen Erde–Mond–Unterschied und folglich auch δ^a nicht:

$$\begin{aligned} p^a \;\to\; \partial\; 2\,\mathrm{Sp}\Big(T^a\overline{V}^{-1}M^{-1}T^cM\overline{V}\Big)\,\delta^c \;&=\; \partial\; 2\mathrm{Sp}\Big(\overline{V}T^a\overline{V}^{-1}T^b\Big)\,2\mathrm{Sp}\Big(T^bM^{-1}T^cM\Big)\,\delta^c \\ =\partial\,(\overline{V}^{-1})^{ab}(M^{-1})^{bc}\,\delta^c \;&=\; (\overline{V}^{-1})^{ab}p^b \quad . \end{aligned} \tag{11.9}$$

Der Schritt in der ersten Zeile, das war *concatenation* rückwärts.

Die Hamilton–Dichte ist holomorph invariant. Der Potentialterm enthält nur die holomorph unempfindlichen A^a selbst. Man kann sich grob vorstellen, daß die kinetische Energie $\delta^{a*}\delta^a$ enthält und daß hier via (11.6) die p–Operatoren ins Spiel gebracht werden können. Der Vorgriff auf

$$\mathcal{T} = -\frac{e^2}{2}\delta^{a*}\delta^a \;=\; \frac{e^2}{2}H^{ab}\,(\overline{G}\overline{p})^a\,(Gp)^b \tag{11.10}$$

[3] Auf dieses Detail (Laplace on $\mathcal{C}$) werden wir uns hier nicht mehr einlassen. Es wird im § 12 nicht benötigt. Wir hadern aber auch mit dem Umstand, daß KKN in [**2.39**] (und Text davor) rechts– und links–Translationen von H betrachten, welche aus dem Raum hermitescher Matrizen herausführen.

ist also nicht tragisch. Wir wollen hier lediglich nachsehen, ob der Ausdruck rechts in (11.10) holomorph invariant ist (was er als $\delta^{a*}\delta^a$–Bildung natürlich zu sein hat). Es versteht sich, daß $H^{ab} = 2\mathrm{Sp}(T^a H T^b H^{-1})$ ist. Die letzte Klammer erlebt

$$(Gp)^b_r := \int' G_{rr'} p^b_{r'} \;\to\; \int' \left(\overline{V}_r^{-1} G_{rr'} \overline{V}_{r'}\right)^{bc} \left(\overline{V}_{r'}^{-1}\right)^{cd} p^d_{r'} = (\overline{V}_r^{-1})^{bc} (Gp)^c_r \quad , \tag{11.11}$$

und man sieht schön, wie (11.5) und (11.8) miteinander harmonieren. Analog folgt $(\overline{G}\overline{p})^a \to V^{ab}(\overline{G}\overline{p})^b$. Jetzt fehlt uns, um (11.10) auf den Mond zu beamen, nur noch $H^{ab} \to V^{ac} H^{cd} \overline{V}^{db}$. Wer dies aus $H \to V H \overline{V}$ herleiten will (Übung), braucht zwei Rückwärts–*concatenations*. Insgesamt verwandelt sich $\mathcal{T}$ in

$$\mathcal{T} \;\to\; \frac{e^2}{2} V^{ac} H^{cd} \overline{V}^{db} V^{ae} (\overline{G}\overline{p})^e (\overline{V}^{-1})^{bf} (Gp)^f \;=\; \mathcal{T} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad . \tag{11.12}$$

(11.12) ist ein Suchbild nach zwei Kroneckern (note that $V^{ae} = (V^{-1})^{ea}$).

11.2 Point splitting

Die Divergenzen einer Feldtheorie werden ja meist (aber nicht notwendigerweise) im K–Raum detektiert und regularisiert (Λ, M, $d-\varepsilon$). Wenn dies im Ortsraum geschehen soll, werden kurze Abstände zu verwaschen sein. KKN's verwaschene Fast–Deltafunktion ist

$$\sigma(\vec{r}\,) := \frac{1}{\pi\eta} e^{-r^2/\eta} \quad , \quad \int d^2 r\; \sigma(\vec{r}\,) = \frac{1}{\pi} \int e^{-r^2} = 1 \tag{11.13}$$

Der „reziproke K–cutoff" η ist klein aber nicht Null. Demgegenüber ist der kleine Parameter ε in der Greensfunktion (4.2) ein eiskaltes $+0$.

In einer Weise, welche holomorphe Transformationen aufrecht erhält, bauen KKN die Verwaschung σ zuerst in den Operatoren p ein und lesen dann aus $(Gp)^a$ ab, wie G zu verarzten ist. Ob dies d e r geeignete Weg (oder ein Umweg) ist, wissen wir nicht. Es folgen Auswertung der regularisierten Greens und schließlich der limes $\vec{r}\,' \to \vec{r}$.

Es beginnt mit Notation: $H(\vec{r}\,)$, wenn als Funktion von z und $\overline{z}$ gelesen, heiße K:

$$H^{ab}(\vec{r}\,) =: K^{ab}(z,\overline{z}) \;\to\; V^{ac}(z)\, K^{cd}(z,\overline{z})\, \overline{V}^{db}(\overline{z}) \quad . \tag{11.14}$$

Mittels (11.14) ist direkt einzusehen, daß die beiden Bildungen

$$\begin{aligned} p^a_{\mathrm{reg}} \quad &:= \int' \sigma_{rr'} \left[K^{-1}(z',\overline{z})\, K(z',\overline{z}') \right]^{ab} p^b_{r'} \\ \overline{p}^a_{\mathrm{reg}} \quad &:= \int' \sigma_{rr'} \left[K(z,\overline{z}')\, K^{-1}(z',\overline{z}') \right]^{ab} \overline{p}^b_{r'} \end{aligned} \tag{11.15}$$

das richtige holomorphe Verhalten (11.7) auch dann zeigen, wenn $\sigma \neq \delta_{rr'}$ bleibt: was die p's nach links ausgeben, wird aufgefressen und ebenso das, was sich zwischen K's ansammeln möchte: $[\,K^{-1}(z',\overline{z})\,]^{ac} \to [\,\overline{V}^{-1}(\overline{z}) K^{-1}(\ldots) V(z')\,]^{ac}$. Und nach links rutscht je die richtige V–Matrix bei ungestrichenem Argument heraus. Irgendwie schlau!

Wie angekündigt, wird nun in der Bildung $(Gp)^a$ der Operator p^a durch seine regularisierte Version p^a_{reg} ersetzt,

$$(Gp)^a = \int' G_{rr'} p^a_{r'} \;\to\; \int' G_{rr'} \int'' \sigma_{r'r''}\, [\,\ldots]^{ab}_{r'r''}\, p^b_{r''} \;=:\; \int'' \mathcal{G}^{ab}_{rr''}\, p^b_{r''} \quad , \tag{11.16}$$

um die regularisierte Greensfunktion $\mathcal{G}$ zu entnehmen:

$$\mathcal{G}^{ab}_{rr''} = \int' G_{rr'}\sigma_{r'r''} \left[K^{-1}(z'',\overline{z}')\, K(z'',\overline{z}'') \right]^{ab} \;=:\; \int' G_{rr'}\sigma_{r'r''}\; f^{ab}(\overline{z}') \quad . \tag{11.17}$$

Die uninteressanten äußeren Variablen z'', $\overline{z}''$ wurden rechts in f unterdrückt. Wir merken uns, daß $f^{ab}(\overline{z}'') = \delta^{ab}$ ist.

11.3 Ausintegration von $\mathcal{G}$

Es klingt abenteuerlich, die d^2r'–Integration in (11.17) ausführen zu wollen. Zwar sind G und σ konkrete Funktionen, aber wir wollen n i c h t etwa $f(\overline{z})$ spezifizieren. Es geht dennoch — aufgrund dessen, daß G eine Greens von ∂ ist.

Das Resultat wird einen Test zu bestehen haben. Gemäß (11.17) gilt nämlich

$$\partial\, \mathcal{G}^{ab}_{rr''} = \sigma_{rr''}\, f^{ab}(\overline{z}) = \frac{1}{\pi\eta} e^{-(\vec{r}-\vec{r}'')^2/\eta} f^{ab}(\overline{z}) \tag{11.18}$$

und nach Auswertung bitte noch immer. Man blicke gleich jetzt voraus auf (11.26) und teste selbst.

Es erweist sich als nützlich, eine Stammfunktion S von σ zu kennen:

$$\partial S(\vec{r}\,) = \sigma(\vec{r}\,) \;\; , \;\; \text{Ansatz } S = \frac{z}{r^2} h(r) \, , \; \ldots \quad \Rightarrow \quad S(\vec{r}\,) = \frac{1}{\pi\,\overline{z}} \left(1 - e^{-r^2/\eta} \right) \quad , \tag{11.19}$$

wobei die Integrationskonstante zur h–Dgl auf $C = 1$ festgelegt wurde. Mittels S und nach partieller Integration bekommt $\mathcal{G}$ zwei Terme (die Indices a, b lassen wir vorübergehend weg):

$$\mathcal{G}_{rr''} = \int' G_{rr'} \;\{\, \partial' S(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'') \,\}\; f(\overline{z}') \;=\; \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \quad . \tag{11.20}$$

Hierin steht $\mathcal{G}_1$ für $\int' \partial' \, [\, GSf\,]$ und $\mathcal{G}_2$ für $- \int' \, [\, \partial' G\,]\; Sf$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 \;\; &= \;\; S(\vec{r} - \vec{r}\,'')f(\overline{z}) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\overline{z} - \overline{z}''} \left(1 - e^{(\vec{r}-\vec{r}\,'')^2/\eta} \right) f(\overline{z}) \\ &\Rightarrow \;\; G_{rr''} \left(1 - e^{(\vec{r}-\vec{r}\,'')^2/\eta} \right) f(\overline{z}) \quad , \end{aligned} \tag{11.21}$$

wobei die Ersetzung durch G erlaubt war, weil die runde Klammer am G–Pol verschwindet (darum die Wahl $C = 1$). Bleibt $\mathcal{G}_1$. Wir schreiben $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_{1\,c} + G_{1\,e}$ und lassen die Indizes auf den $C{=}1$–Term bzw. den e–Term in S verweisen. In $\mathcal{G}_{1\,c}$ wirkt ∂' nur auf G und gibt $\partial' G_{rr'} = -\delta_{rr'}$:

$$\mathcal{G}_{1c} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\overline{z} - \overline{z}''}\; f(\overline{z}) \quad . \tag{11.22}$$

Zum Term $\mathcal{G}_{1\,e}$,

$$\mathcal{G}_{1e} = - \int d^2r' \;\, \partial' \left[\frac{1}{\pi}\, \frac{z - z'}{(z-z')\,(\overline{z} - \overline{z}') + \varepsilon^2}\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\overline{z}' - \overline{z}''}\; e^{-(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'')^2/\eta}\; f(\overline{z}') \right] \quad , \tag{11.23}$$

ist zu begreifen, daß hierin der limes $\varepsilon \to 0$ ausgeführt werden darf (Details seien dem Leser überlassen). Jetzt wird die Sache hübsch. Nach Verschiebung $\vec{r}\,' \to \vec{r}\,' + \vec{r}\,''$ und in den Variablen

$$x' = \frac{1}{2}(u - iv) \;\; , \;\; y' = \frac{1}{2}(-iu + v) \;\; , \;\; \text{Jacobi–Det.} = \frac{1}{2} \quad , \quad \left(\, \overline{z}' = u \;\; , \;\; z' = -iv \,\right)$$

folgt nämlich

$$\mathcal{G}_{1\,e} = -\frac{i}{2}\frac{1}{\pi}\int du' \, \frac{f(u'+u'')}{u-u''-u'} \; \frac{1}{\pi\, u'}\int dv' \; \partial_{v'} \; e^{i\,\frac{u'}{\eta}\,v'} \;\; = \; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\overline{z}-\overline{z}''}\; f(\overline{z}'') \quad . \tag{11.24}$$

Die rechte Seite ensteht per Ausführen von $\partial_{v'}$, $\delta(u')$ aus der v'–Integration und reuiger Rückkehr zu $u''=\overline{z}''$. Addition von (11.22) und (11.24) gibt

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_{1\,e} + \mathcal{G}_{1\,c} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\overline{z}-\overline{z}''}\;[\,f(\overline{z}'') - f(\overline{z})\,] \quad \Rightarrow \quad G_{rr''}\;[\,f(\overline{z}'') - f(\overline{z})\,] \tag{11.25}$$

und zusammen mit (11.21) das Resultat

$$\mathcal{G}^{ab}_{rr''} = G_{rr''}\,\Big(\delta^{ab} - e^{-(\vec{r}-\vec{r}'')^2/\eta}\; f^{ab}(\overline{z})\,\Big) \quad . \tag{11.26}$$

(11.26) ist [**3.8**]. Wir haben zwar von der konkreten σ–Gestalt Gebrauch gemacht, aber jede Wette, daß die Prozedur (incl. nächster Unterabschnitt) von σ–Details nicht wirklich abhängt (der Leser bekommt allmählich immer mehr zu tun).

11.4 Der limes $\vec{r}\,' \to \vec{r}$

Jetzt — nach Regularisierung — ist der Koinzidenz–limes problemlos ausführbar. Wir blicken auf $\mathcal{G}_2$, (11.21), und erkennen, daß die runde Klammer viel schneller verschwindet, nämlich $\sim (z-z'')\,(\overline{z}-\overline{z}'')$, als der Nenner. Kurz, $\mathcal{G}_2$ geht gegen **Null**. Zu $\mathcal{G}_1$ zeigt der mittlere Ausdruck in (11.25) einen Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ab}_{rr} \;=\; \mathcal{G}^{ab}_{1\,rr} \;\;=\;\; -\frac{1}{\pi}\;\overset{\Downarrow}{\overline{\partial}}\;\Big[K^{-1}(z,\,\overset{\Downarrow}{\overline{z}}\,)\,K(z,\overline{z})\Big]^{ab} = \frac{1}{\pi}\,\Big[H^{-1}\overline{\partial}H\,\Big]^{ab} \\ = \frac{1}{\pi}\,\Big[M^{-1}M^{\dagger-1}\Big((\overline{\partial}M^\dagger)M + M^\dagger\overline{\partial}M\Big)\Big]^{ab} = \frac{-1}{\pi}\,\Big[M^{-1}\Big(A^\dagger - (\overline{\partial}M)M^{-1}\Big)M\,\Big]^{ab} . \end{aligned} \tag{11.27}$$

(11.27) ist [**3.10**]. In (9.9) haben wir nun nur noch G durch $\mathcal{G}$ zu ersetzen:

$$\Big[\,D^{-1}_{\mathrm{reg}}\,\Big]^{ab}_{rr} = M^{ac}\,\mathcal{G}^{cd}_{rr}\,(M^{-1})^{db} = -\frac{1}{\pi}\;\Big[A^\dagger - (\overline{\partial}M)M^{-1}\Big]^{ab} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{11.28}$$

und „hurra!" , denn das ist das Wunschresultat (9.14).

12 Hamiltonian, mass gap and CFT

Irgendwo — weit hinter uns — lag schon einmal die klassische Hamilton–Dichte auf dem Papier, (2.8) bis (2.10) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2}\dot{A}^a_j\dot{A}^a_j - \mathcal{V} \quad , \quad \mathit{\Pi}^a_j = \frac{1}{e^2}\dot{A}^a_j \quad , \quad \mathcal{H} = \frac{e^2}{2}\mathit{\Pi}^a_j\mathit{\Pi}^a_j + \mathcal{V} \tag{12.1}$$

mit $\mathcal{V} := \frac{1}{2e^2}B^aB^a$ und $B^a = \partial_1A^a_2 - \partial_2A^a_1 + f^{abc}A^b_1A^c_2$. Bei Abwesenheit von Eichfreiheit w ü r d e nun Quantenmechanik durch $\mathit{\Pi}^a_j \;\Rightarrow\; (1/i)\,\delta_{A^a_j}$ einzuläuten sein und

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{T} \,=\, -\frac{e^2}{2}\delta_{A^a_j}\delta_{A^a_j} \;=\; -\frac{e^2}{2}\delta^{a*}\delta^a \tag{12.2}$$

geben — wie schon in (11.10) behauptet. Es gibt eine recht billige Antwort darauf, wie sich $\mathcal{T}$ auf den Raum $\mathcal{C}$ beschränken läßt (und obiges „würde" ausräumen läßt): wende $\mathcal{T}$ nur auf Funktionale von H an! KKN's Bemühungen um den *Laplacian on* $\mathcal{C}$ laufen darauf hinaus, jenen Anteil von δ^a (oder von p^a) abzuspalten und wegzulassen, welcher Umeich–Anteile verändert. Sind solche Anteile erst gar nicht da, dann ist $\mathcal{T}$ a u t o m a t i s c h geeignet reduziert.

12.1 $\boldsymbol{T\, J^a \;=\; m\, J^a}$

Wir wenden $\mathcal{T}$ auf spezielle $\psi[H]$ an. Welche? Einmal mehr lassen wir uns von KKN leiten, nämlich vom Text vor [**2.28**]). Dort findet sich eine ebenso interessante wie (vorerst) mysteriöse Behauptung (beruhend auf Konformer Feldtheorie $=:$ CFT). Es seien, so die Behauptung, nur Funktionale $\psi[H]$ normierbar, welche über die „Ströme"

$$\begin{aligned} J^a(\vec{r}) \;&=\; \frac{2N}{\pi}\,\mathrm{Sp}\Big(T^a\,(\partial H)\,H^{-1}\Big) \\ &=\; \frac{N}{\pi}\,2\,\mathrm{Sp}\Big(T^a\,\Big[(\partial M^\dagger)M^{\dagger-1} + M^\dagger i T^c A^c M^{\dagger-1}\Big]\Big) \end{aligned} \tag{12.3}$$

von H abhängen. Unter diesen wiederum betrachten wir (wie Karabali, Nair in [4]) speziell

$$\psi_{\mathrm{sp}}\,[H] \;:=\; \int c^a(\vec{r})J^a(\vec{r}) \tag{12.4}$$

(mit beliebigen c–Zahl–Funktionen c^a) und wenden $\mathbf{T} = \int\mathcal{T}$ auf (12.4) an. Die Details $(*)$, $(**)$ werden nachgestellt, denn die Sache ist allzu aufregend:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\,\psi_{\mathrm{sp}} \;&=\; -\frac{e^2}{2}\int \delta^{a*}_r\,\delta^a_r \int' c^d_{r'}\,J^d_{r'} \\ &=\; -\frac{e^2}{2}\int \delta^{a*}_r\,\frac{N}{\pi}\,i\,c^d_r(M^\dagger_r)^{da} \;=\; -i\,\frac{e^2N}{2\pi}\int c^d\,\Big[\delta^{a*}_{r'}(M^\dagger_r)^{da}\Big]_{\vec{r}'\to\vec{r}} \\ &=\; -i\,\frac{e^2N}{2\pi}\int c^d\,\Big[(M^\dagger_{r'})^{db}f^{bae}\Big(D^{*-1}_{rr'}\Big)^{ae}\Big]_{\vec{r}'\to\vec{r}} \qquad\qquad (*) \\ &=\; -i\,\frac{e^2N}{2\pi}\int c^d\,(M^\dagger)^{db}\,\frac{iN}{\pi}\,2\,\mathrm{Sp}\Big(T^b\,\Big[M^{\dagger-1}\partial M^\dagger + (\partial M)M^{-1}\Big]\Big) \qquad (**) \\ &=\; \frac{e^2N}{2\pi}\int c^d\,\Big[\frac{N}{\pi}\,2\,\mathrm{Sp}\Big(T^d(\partial H)H^{-1}\Big)\Big] \\ &=\; \frac{e^2N}{2\pi}\int c^dJ^d \;=\; m\;\psi_{\mathrm{sp}} \qquad , \qquad m := \frac{e^2N}{2\pi} \quad . \end{aligned} \tag{12.5}$$

Eigenfunktionen von $\mathbf{T}$ sind gefunden. Und wegen der Beliebigkeit der Gewichte $c^a(\vec{r})$ ist der Eigenwert m unendlichfach entartet.

Der Schritt zur zweiten Zeile brauchte $\delta^a_r J^d_{r'}$, und dies kann direkt aus (12.3) abgelesen werden. Die Zeile $(*)$ zeigt, daß hier genau der gleiche Koinzidenzlimes auftaucht wie schon in (9.6). Mehr noch, die Faktoren $f^{\cdots}D^{*-1}$ in der eckigen Klammer s i n d $\delta^b\Gamma$ und können — regularisiert und im limes — durch (9.20) ersetzt werden. Dies erklärt die Zeile $(**)$. Von dieser zur nächsten ist nur noch eine *concatenation* vorzunehmen. Es bleibt die Frage, wie man von der zweiten zur Zeile $(*)$ gelangt. Der Inhalt der eckigen Klammern sei gleich, wird behauptet. $\delta^a_{r'}\hat{M}_r$ — c.c. nehmen wir später — muß sich aus $0 = \left(\partial + \hat{A}\right) \hat{M}$ ergründen lassen, d.h. gleich aus der adjungierten Version (9.12) (Erinnerung: $A^{ab} = A^{\bullet} f^{a \bullet b}$). Wir wenden $\delta^a_{r'}$ an, benutzen (7.13) und erhalten

$$\int^{\prime\prime} D^{eb}_{rr''}\, \delta^a_{r'} M^{bd}_{r''} = \delta_{rr'} f^{aeb} M^{bd}_{r'} \quad \Rightarrow \quad \delta^a_{r'} M^{cd}_r = (D^{-1}_{rr'})^{ce} f^{aeb} M^{bd}_{r'} \quad . \tag{12.6}$$

Hier kann nun $a = c$ gesetzt und über a summiert werden. Mittels $M^{db\,*} = (M^\dagger)^{bd}$ schreibt sich das gewünschte c.c. leicht daneben:

$$\delta^a_{r'} M^{ad}_r = (D^{-1}_{rr'})^{ae} f^{aeb} M^{bd}_{r'} \quad , \quad \delta^{a*}_{r'} (M^\dagger_r)^{da} = (M^\dagger_{r'})^{db} f^{bae} \left(D^{*-1}_{rr'}\right)^{ae} \quad , \tag{12.7}$$

was zu zeigen war. Wer da aber gern eigene Wege geht, kann leicht in einem Morast versinken. Er gelangt z.B. anstelle von (12.6) zu einer anderen, recht ähnlichen Beziehung, nämlich

$$\delta^a_{r'} M^{cd}_r = (D^{-1}_{rr'})^{ea} f^{ecb} M^{bd}_r \quad . \tag{12.8}$$

Bei $c = a$ und Summation über a ergibt sich (12.7) nur fast, denn M^{bd} trägt jetzt den Index r (statt r'). Also verflucht er (12.5) und sucht stundenlang nach seinem oder unserem Fehler — ohne Erfolg. Alles ist richtig! (12.6) und (12.8) lassen sich mittels (9.9) auseinander herleiten. In der speziellen Bildung (12.7) d a r f man den $\vec{r}$–Index an M wechseln.

12.2 $S[H]$ ist konform invariant

Schon seit § 2 leben wir im 2D Euklidischen. Das ist der spezielle Fall, in welchem die Forderung nach konformer Invarianz besonders viel verlangt [13, 14, 15, 16], weil in der globalen Koordinatentransformation

$$z \;\to\; f(z) \qquad , \text{ d.h. } \; z_{\text{neu}} = u(x,y) - iv(x,y) \stackrel{!}{=} f(x - iy) \tag{12.9}$$
$$\Rightarrow \quad u_{/x} = v_{/y} \quad , \quad u_{/y} = -v_{/x}$$

die Funktion $f(z)$ beliebig bleibt. Daß dabei (a) — dem Wort „konform" entsprechend — der Winkel zwischen zwei infinitesimalen Vektoren $d\vec{r}$, $d\vec{\rho}$ der gleiche bleibt und (b) die flache Metrik $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $f' f'^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ übergeht [15], kann man sich gemütlich selbst aufklären.

(12.9) ist eine reine Koordinatentransformation. Die Werte der Felder $H(z,\overline{z})$ ändern sich nicht. Infinitesimal ($\varepsilon \to 0$, $g(z)$ beliebig) heißt das

$$\begin{aligned} z \to z' = z + \varepsilon\, g(z) \quad , \quad H'(z',\overline{z}') \;&=\; H(z,\overline{z}) = H(z' - \varepsilon g, \overline{z}' - \varepsilon \overline{g}) \\ &=\; H(z',\overline{z}') - \varepsilon g \partial H - \varepsilon \overline{g}\, \overline{\partial} H \quad . \end{aligned} \tag{12.10}$$

Zum Nachweis der konformen Invarianz von $S[H]$ haben wir zu zeigen[4], daß

$$S' - S \;=\; \int d^2r'\, \mathcal{L}\left\{ H'(z',\overline{z}')\,,\, \partial'\,,\, \overline{\partial}' \right\} - S = \int d^2r\, \mathcal{L}\left\{ H + \delta H\,,\, \partial\,,\, \overline{\partial} \right\} - S$$

[4] In der ersten Zeile (12.11) wurde rechts die Variable $\vec{r}\,'$ in $\vec{r}$ umbenannt. Bei Subtraktion von S vergißt man daraufhin Randterm–Unterschiede. Das ist der Grund dafür, daß „Noether 1" (Nachtmann, Fließbach, die Jacobi–Determinante der Transformation explizit bedenkend) nur selten eine totale Ableitung in der Invarianzbedingung benötigt, insbesondere nicht bei Translationen. „Noether 2" wälzt hingegen auf Felder ab und kann aus Noe 1 mit der genannten Umbenennung hergeleitet werden. Auf Noe 2 sind sämtliche Experten des Hauses (Brandt, Dragon, Lechtenfeld, Reuter) eingeschworen.

$$= \quad S\,[\,H+\delta H\,]-S\,[\,H\,]=\delta S \quad \text{zu speziell} \quad \delta H=-\varepsilon g\partial H-\varepsilon\overline{g}\overline{\partial}H \tag{12.11}$$

verschwindet. Natürlich dürfen sich S' und S auch um eine Konstante unterscheiden, resultierend aus Randtermen bei partieller Integration. Solche Beiträge seien hier ignoriert. Zur Variation von S — unter welcher Vorgabe δH auch immer — haben wir die fertige Formel (9.33) :

$$\delta S=\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Sp}\Big(\,\varphi\;\partial\overline{X}\,\Big) \quad \text{mit} \quad \Big\{\varphi,X,\overline{X}\Big\}=H^{-1}\Big\{\delta,\partial,\overline{\partial}\Big\}\,H \quad . \tag{9.33}$$

Jetzt ist nur noch δH aus (12.11) hier einzusetzen.

$$\begin{aligned} \delta_{\text{konfo}}\;S \;&=\; -\frac{\varepsilon}{\pi}\int\Big[g\,\mathrm{Sp}\left(X\,\partial\overline{X}\right)\;+\;\overline{g}\,\mathrm{Sp}\left(\overline{X}\,\partial\overline{X}\right)\Big] \\ &=\; -\frac{\varepsilon}{\pi}\int\Big[g\,\mathrm{Sp}\left(X\,\left[\,\overline{\partial}X+\overline{X}X-X\overline{X}\,\right]\right)\;+\;\overline{g}\,\mathrm{Sp}\left(\overline{X}\partial\overline{X}\right)\Big] \\ &=\; -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\Big[\overline{\partial}\;g\;\mathrm{Sp}\,(XX)\;+\;\partial\;\overline{g}\;\mathrm{Sp}\left(\overline{X}\,\overline{X}\right)\Big] \;=\; 0 \quad , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{12.12}$$

In der zweiten Zeile wurde (9.34), d.h. $\overline{\partial}X+\overline{X}X=\partial\overline{X}+X\overline{X}$, benutzt, und $\overline{\partial}g=\partial\overline{g}=0$ in der dritten.

Die Bewegungsgleichung der S–Theorie folgt aus $\delta S=0$ zu unabhängiger Variation der N^2-1 H–Elemente. Man kann sie aus (9.33) ablesen:

$$\begin{aligned} \partial\,\overline{X}=0 \qquad\qquad &\text{oder} \quad \partial\,J^\dagger=0 \quad \text{mit} \quad J^\dagger:=H^{-1}\overline{\partial}H \\ &\text{sowie} \quad \overline{\partial}\,J=0 \quad \text{mit} \quad J:=(\partial H)H^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{12.13}$$

Der Matrix–Strom J kann natürlich in $J=(J_1+iJ_2)/2$ zerlegt werden mit $J_\ell=(\partial_\ell H)H^{-1}$. Wie (10.1) zeigt, kann die Wirkung $S[H]$ restlos durch diese J_ℓ ausgedrückt werden. Jene Funktionen $J^a(\vec{r}\,)$ in (12.3) möchten nun bitte (bis auf Vorfaktor) nichts weiter sein als die Koeffizienten in der Entwicklung $J=J^aT^a$, woraus $J^a=2\,\mathrm{Sp}\,(T^a\,J)$ folgen würde. Um so aufspannen zu dürfen, hat $J=(\partial H)H^{-1}$ spurfrei zu sein. Hierzu hatte O. Lechtenfeld die rechte Idee. Mit der auf $\det(H)=1$ beruhenden Darstellung $H=e^{\vec{\sigma}\vec{T}}$, σ^a reell, vgl. (5.8) und (8.14), ergibt sich

$$\mathrm{Sp}\Big((\partial H)H^{-1}\Big)=\mathrm{Sp}\left(\int_0^1 ds\;e^{s\vec{\sigma}\vec{T}}(\partial\sigma^a)T^a e^{-s\vec{\sigma}\vec{T}}\right)=(\partial\sigma^a)\;\mathrm{Sp}\Big(T^a\Big)=0 \tag{12.14}$$

tatsächlich.

12.3 Ende

Unverbesserlichen Fußgängern war schon auf Seite 1 ein frühes Ende prophezeit worden. Was hier alsbald abbricht, ist natürlich nur das „Logbuch" dieser Expedition. Wir befinden uns mitten im zerklüfteten Gelände. Die Luft wird dünner. Es folgen nur noch ein paar Notizen zur momentanen Situation.

Die Masse m ist möglicherweise die, welche quadriert im Gluon–Propagator steht. Aber das physikalische (holomorph invariante) Spektrum dürfte — sofern wir KKN recht vertstehen — als ersten angeregten Zustand eine Zwei–J–Bildung (*glue ball*) haben: *mass gap* $= 2m$. Offene Frage ist vorerst auch, weshalb der Potentialterm $\mathcal{V}$ nur eine untergeordnete (Entartung aufhebende) Rolle spielt. Der Wilson–loop [**2.32**] dürfte den Einstieg in die *confinement*–Region [5] bieten. KKN's Paragraphen 4 (*An expression for* **T** *in terms of currents*), 6 (*Construction of eigenstates of* **T**) und 7 (*Corrections due to the potential term*) werden schon noch irgendwie zu bezwingen sein. Wohlan — und Helau: Aschermittwoch 1999.

Im Text ist sporadisch von allerlei Leuten die Rede, welche mal hier, mal da weitergeholfen haben. Ein herzliches Dankeschön! Die Leute sind F. Brandt, N. Dragon, O. Lechtenfeld, S. Ketov, J. Reinbach, M. Reuter, Y. Schröder und J. Schulze. I am also indebted to D. Karabali and V.P. Nair for one or another helpful discussion during the TFT'98 in August at Regensburg.

References

[1] D. Karabali, C. Kim and V. P. Nair, Nucl. Phys. **B 524** (1998) 661.

[2] A. D. Linde, Phys. Lett. **B 96** (1980) 289.

[3] R. P. Feynman, Nucl. Phys. B **188** (1981) 479.

[4] D. Karabali, V. P. Nair, Nucl. Phys. **B 464** (1996) 135; Phys. Letters **B 379** (1996) 141; Int. J. Mod. Phys. **A 12** (1997) 1161;

[5] D. Karabali, C. Kim and V. P. Nair, hep–th / 98 04 132 (April 1998) (On the vacuum wavefunction and string tension of Yang–Mills theories in (2+1) dimensions).

[6] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140** (1982) 372.

[7] R. Jackiw in Les Houches, Session XL, 1983 (Elsevier Sci. Pub. 1984).

[8] M. Bos and V. P. Nair, Int. J. Mod. Phys. **A 5** (1990) 959.

[9] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Nucl. Phys. **B 320** (1989) 625.

[10] A. M. Polyakow and P. B. Wiegmann, Phys. Lett. **B 131** (1983) 121.

[11] D. Karabali, proceedings of the TFT'98, hep-th/980987.

[12] A. M. Polyakow and P. B. Wiegmann, Phys. Lett. **B 141** (1984) 223.

[13] P. Ginsparg *Applied Conformal Field Theory* in Les Houches Lectures XLIX (=49), North–Holland 1990.

[14] J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press 1992.

[15] S. Ketov, *Conformal Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1995.

[16] A. N. Schellekens, *Conformal Field Theory*, Lecture notes, Saalburg 3.–16. September 1995; NIKHEF–H/95.