Ergänzungen für die Übung zu der Blockvorlesung

Elementare Einführung in zweidimensionale konforme Feldtheorie

$\cdot\diamond\cdot$ Blatt I $\cdot\diamond\cdot$ zum 10.01.2000 $\cdot\diamond\cdot$ Michael Flohr $\cdot\diamond\cdot$

1. In der Vorlesung wurden für $d > 2$ konforme Transformationen analysiert. Dies geschah unter der Voraussetzung von Weyl-Invarianz und unter der Annahme, dass die Raumzeit konform flach ist, d.h. $g_{\mu\nu}(x) = \gamma(x)\eta_{\mu\nu}$. Mit Hilfe der Weyl-Invarianz kann der Faktor $\gamma(x)$ absorbiert werden. Damit nahm die konforme Killing-Gleichung, der eine infinitesimale Koordinatentransformation $x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ genügen muss, die Form

$$\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial\cdot\varepsilon)\eta_{\mu\nu} \qquad (*)$$

an. Es ergab sich die Frage, wie dies für eine beliebige gekrümmte Raumzeit aussieht. Das Problem besteht in der expliziten Ortsabhängigkeit der Metrik. Die konforme Killing-Gleichung sieht im allgemeinen Fall wie folgt aus:

$$\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu + (\varepsilon\cdot\partial)g_{\mu\nu} = \frac{2}{d}(\partial\cdot\varepsilon)g_{\mu\nu} + \frac{1}{d}\left[g^{\sigma\rho}(\varepsilon\cdot\partial)g_{\rho\sigma}\right]g_{\mu\nu}\,. \qquad (*')$$

Diese Gleichung hat *im allgemeinen* nur triviale Lösungen, d.h. $\varepsilon^\mu \equiv 0$. Für diejenigen, die etwas mit allgemeiner Relativitätstheorie vertraut sind, sei darauf hingewiesen, daß diese Gleichung $(*')$ mit Hilfe der *kovarianten* Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ geschrieben werden kann, wobei die Γ_μ die als Matrizen aufgefassten Christoffel-Symbole

$$(\Gamma_\mu)_\lambda{}^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\mu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\lambda})$$

darstellen. Damit nimmt $(*')$ die gleiche Form wie $(*)$ an, d.h.

$$D_\mu\varepsilon_\nu + D_\nu\varepsilon_\mu = \frac{2}{d}(D\cdot\varepsilon)g_{\mu\nu}\,.$$

2. Bei der Besprechung von Aufgabe 3. blieben Fragen bezüglich der stereographischen Projektion offen. Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ wird auf übliche Weise auf die Sphäre S^2 abgebildet. Wird die Einheitssphäre mit ihrem Ursprung in den Ursprung der Ebene gelegt, so werden Punkte $(x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2)$ explizit auf Punkte $(\xi = \cos(2\arctan R)\cos\varphi, \eta = \cos(2\arctan R)\sin\varphi, \zeta = \sin(2\arctan R))$ abgebildet, so dass in der Tat $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ist. Damit werden Punkte gleicher Norm, also Kreise um den Ursprung mit fixiertem Radius R, abgebildet auf Breitengrade mit Radius $\varrho = \eta^2/(\xi^2 + \eta^2) = \sin(2\arctan R)$.

   Nun betrachten wir die Minkowski-Ebene $\mathbb{R}^{1,1}$. Punkte (x, y) gleicher Norm R genügen nun der Gleichung $x^2 - y^2 = R^2 = (x-y)(x+y)$. Die faktorisierte Form legt es nahe, die chiralen Koordinaten $x^- = (x-y)$ und $x^+ = (x+y)$ jeweils stereographisch auf einen Kreis S^1 zu projizieren, d.h. $x^\pm \mapsto (\xi^\pm = \cos(2\arctan x^\pm), \eta^\pm = \sin(2\arctan x^\pm))$. Punkte gleicher Norm, also Hyperbeln mit fixiertem Ursprungsabstand R, werden abgebildet auf geschlossene Kurven auf dem Torus $S^1 \times S^1$. Diese kann man sich dadurch anschaulich machen, dass man den Torus durch ein Quadrat mit Kantenlänge 2π darstellt (gegenüberliegende Kanten werden miteinander identifiziert), dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt. Auf diesem Quadrat erscheinen die projizierten Hyperbeln ebenfalls als Hyperbeln mit

Ursprungsabstand ϱ mit $\varrho^2 = 4 \arctan x^- \arctan x^+$. Allerdings hat man auf diese Weise jeden Punkt von $\mathbb{R}^{1,1}$ zweimal auf den Torus abgebildet, was man leicht einsieht, wenn man $(x, y) \in \mathbb{R}^{1,1}$ durch "Polarkoordinaten" parametrisiert, $x = R \cosh \varphi$, $y = R \sinh \varphi$. Die korrekte Mannigfaltigkeit ist also $(S^1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$. Eine ähnliche Betrachtung läßt sich selbstverständlich auch in den ursprünglichen Koordinaten (x, y) anstellen, was im wesentlichen einer Drehung um $\pi/4$ entspricht.

Das läßt sich nun auf höherdimensionale Raumzeiten $\mathbb{R}^{p,q}$ verallgemeinern. Dazu definiert man die Mannigfaltigkeiten $S^{p,q} = (S^p \times S^q)/\mathbb{Z}_2$. Für den euklidischen $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d,0}$ ist $S^{d,0} = (S^d \times S^0)/\mathbb{Z}_2 = (S^d \times \{-1, 1\})/\mathbb{Z}_2 = S^d$ die d-dimensionale Einheitssphäre, wie man es auch erwarten würde. Die stereographische Projektion ist nun die Verallgemeinerung auf höherdimensionale Sphären, wobei dies getrennt für die raumartigen und die zeitartigen Koordinaten durchgeführt wird. (Für $p \neq q$ existiert natürlich keine so schöne Faktorisierung in chirale Koordinaten, wie sie oben für $\mathbb{R}^{1,1}$ eingeführt wurde.)

In der Vorlesung wurde der Lichtkegel $LC^{p+1,q+1} \subset \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ erwähnt, $LC^{p+1,q+1} = \{x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q : (x)^2 - (y)^2 = 0\}$. Offensichtlich ist für $(x, y) \in LC^{p+1,q+1}$ auch $(\lambda x, \lambda y) \in LC^{p+1,q+1}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Identifiziert man solche Punkte miteinander, so erhählt man die Menge aller Lichtstrahlen, die also in natürlicher Weise durch den projektiven Raum $\mathbb{P}LC^{p+1,q+1} = LC^{p+1,q+1}/\mathbb{R}$ parametrisiert wird. Beachtet man, dass ein Lichtstrahl damit bis auf das Vorzeichen fixiert ist, so erkennt man sofort, dass $\mathbb{P}LC^{p+1,q+1} \cong S^{p,q}$ ist.