Anregungen für Übungen zu der Blockvorlesung

Elementare Einführung in zweidimensionale konforme Feldtheorie

$\cdot\diamond\cdot$ Blatt I $\cdot\diamond\cdot$ zum 07.01.2000 $\cdot\diamond\cdot$ Michael Flohr $\cdot\diamond\cdot$

1. In der Vorlesung wurde für eine infinitesimale Transformation $x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ der Koordinaten die Gleichung

   $$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \varepsilon) g_{\mu\nu}$$

   abgeleitet als Bedingung dafür, dass ε^μ eine konforme Transformation erzeugt. Nehmen Sie $d > 2$ an und analysieren Sie diese Gleichung wie in der Vorlesung skiziert, um die Form von ε zu bestimmen.

2. Die konforme Algebra für $d > 2$ wird erzeugt durch die Generatoren

   $$\begin{array}{lcl} P_\mu & = & \partial_\mu \\ M_{\mu\nu} & = & \frac{1}{2}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \\ D & = & x^\mu \partial_\mu \;=\; (x \cdot \partial) \\ K_\mu & = & (x)^2\, \partial_\mu - 2x_\mu (x \cdot \partial)\,. \end{array}$$

   Zeigen Sie, dass diese Generatoren eine abgeschlossene Algebra bilden, indem Sie die Kommutatoren berechnen. Verwenden Sie dabei $[\partial_\mu, x_\nu] = \eta_{\mu\nu}$.

3. Für eine (flache) Raumzeit M mit Signatur (p,q) ist die konforme Gruppe im Falle $p + q > 2$ isomorph zu $SO(p+1, q+1)$. Das stimmt auch für den zweidimensionalen euklidischen Fall $(2,0)$. Machen Sie sich das anschaulich klar, indem Sie $M = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ stereographisch auf die Sphäre S^2 abbilden und sich überlegen, dass diese in den Lichtkegel von $\mathbb{R}^{3,1}$ eingebettet werden kann. Wie sieht es für den Fall $M = \mathbb{R}^{1,1}$ aus, bzw. für eine Raumzeit dieser Signatur, deren Raum-Koordinate durch periodische Randbedingungen kompaktifiziert wurde (d.h. ein Zylinder mit Minkowski-Metrik)?

4. Was in der Quantenmechanik der harmonische Oszillator ist, ist in der Quantenfeldtheorie das freie skalare Feld. Die Wirkung im klassischen Fall lautet

   $$S \propto \int \mathrm{d}^d x \sqrt{\det g}\, g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi(x) \partial_\nu \Phi(x)\,.$$

   Eine infinitesimale Koordinatentransformation führe zu der Variation der Metrik $\delta g_{\mu\nu}$. Drücken Sie die Variation der Inversen der Metrik, $\delta g^{\mu\nu}$, sowie die Variation von $\sqrt{\det g}$ durch $\delta g_{\mu\nu}$ aus. Hinweis: $\det A = \exp(\mathrm{tr}\, \log A)$.

   Zeigen Sie weiter, dass der damit (in der Vorlesung) bestimmte Energie-Impuls-Tensor erhalten und, für $d = 2$, auch spurfrei ist, d.h. $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ und $T^\mu{}_\mu = 0$. Hinweis: Beachten Sie die Bewegungsgleichung für $\Phi(x)$.

5. In der zweidimensionalen konformen Feldtheorie arbeitet man gerne mit komplexen Koordinaten $(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^2$, d.h. $\bar{z}$ wird als von z völlig unabhängige Koordinate aufgefasst. Machen Sie sich klar, durch welche "reellen Schnitte" aus $\mathbb{C}^2$ die in Aufgabe Nr. 3 erwähnten Raumzeiten $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^{1,1}$ erhalten werden können. Wie verhält sich $\mathbb{C}^2$ zu den Einbettungsräumen $\mathbb{R}^{3,1}$ bzw. $\mathbb{R}^{2,2}$? Wie liegt der Minkowski-Zylinder in $\mathbb{C}^2$?

   Was sind die möglichen *global* definierten konformen Transformationen in der kompaktifizierten Ebene $\hat{\mathbb{C}} = S^2$ (der Riemannschen Zahlensphäre)? Welche *global* definierten konformen Transformationen gibt es auf dem *kompaktifizierten* Minkowski-Zylinder?

6. Ab jetzt sind wir zweidimensional. Ein konformes Feld $\Phi(z,\bar{z})$ der Skalendimension h transformiert sich unter einer konformen Koordinatentransformation $z \mapsto f(z)$ gemäß

$$\Phi(z,\bar{z}) \mapsto \Phi'(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)^h \Phi(f(z),\bar{z})\,.$$

Berechnen Sie für eine infinitesimale Transformation $f(z) = z + \varepsilon(z)$ die Variation $\delta_\varepsilon \Phi(z,\bar{z})$.

7. Es werden N freie Bosonen in zwei Dimensionen mit periodische Randbedingungen $\Phi^j(x^0,x^1) = \Phi^j(x^0,x^1+2\pi)$ betrachtet. In der Vorlesung wurden diese Felder in Fourier-Reihen entwickelt,

$$\Phi^j(x^0,x^1) = q^j + 2p^j x^0 + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left[\alpha_n^j \mathrm{e}^{-in(x^0+x^1)} + \tilde{\alpha}_n^j \mathrm{e}^{-in(x^0-x^1)}\right]\,.$$

Was fällt Ihnen bezüglich der Periodizitätseigenschaften von Φ^j auf? Leiten Sie die Kommutatoren der Moden aus den kanonischen Vertauschungsregeln für Φ^j und dem konjugierten Impuls $\Pi^k = \frac{1}{4\pi}\partial_0\Phi^k$ her.

8. In der Vorlesung wurde die Operatorproduktentwicklung des Energie-Impuls-Tensors mit sich selbst abgeleitet,

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4}\mathbb{1} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial T(w) + \text{reguläre Terme}\,.$$

Leiten Sie daraus mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy die Kommutatoren der Laurent-Moden (oder Virasoro-Generatoren)

$$L_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{d}z\, z^{n+1}T(z)$$

her. Wie müßen die Kommutatoren $[L_n, c\mathbb{1}]$ aussehen? Ein Teil der Virasoro-Generatoren annihiliert das Vakuum, $L_n|0\rangle =$ für $n \geq 1$. Warum kann dies nicht für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelten? Berechnen Sie damit und mit Hilfe der Kommutatoren den Vakuumerwartungswert $\langle 0|\, L_2 L_{-2}\,|0\rangle$. Interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich der Tatsache, daß man in der Quantentheorie üblicherweise mit projektiven Hilbert- bzw. Fockräumen arbeitet.

9. In der Vorlesung wurden diverse Operatorproduktentwicklungen mit freien Bosonen $\Phi(z,\bar{z})$ berechnet, z.B. $\Phi(z,\bar{z})\Phi(w,\bar{w})$. Es sei nun ein neues Feld definiert als $V_\beta(w,\bar{w}) = :\!\exp\, i\beta\Phi(w,\bar{w})\!:$, das auch *Vertexoperator* genannt wird. Nehmen Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, verwenden Sie $T(z) = -\frac{1}{2}:\!\partial\Phi(z)\partial\Phi(z)\!:$ für den Energie-Impuls-Tensor, und leiten Sie damit die Operatorproduktentwicklung $T(z)V_\beta(w,\bar{w})$ ab. Was folgt daraus für das Feld $V_\beta(w,\bar{w})$?

   Ein freies Boson wie aus Aufgabe Nr. 7, transformiert auf komplexe Koordinaten mittels $z = \exp\, i(x^0+x^1)$, $\bar{z} = \exp\, i(x^0-x^1)$, hat die Gestalt

$$\Phi(z,\bar{z}) = q - ip(\log z + \log\bar{z}) + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left[\alpha_n z^{-n} + \tilde{\alpha}_n \bar{z}^{-n}\right]\,,$$

   wobei wir den Index j vergessen haben. Wie sieht demnach $V_\beta(z,\bar{z}) = \exp(\ldots?\ldots)$ nach Ausführen der Normalordnung aus?