Anregungen für Übungen zu der Blockvorlesung

Elementare Einführung in zweidimensionale konforme Feldtheorie

·⋄· Blatt II ·⋄· zum 28.01.2000 ·⋄· Michael Flohr ·⋄·

1. Es seien (quasi-) primäre Felder auf der kompaktifizierten komplexen Ebene (also der Riemannschen Zahlenkugel S^2) betrachtet. Zur Erinnerung: Quasiprimäre Felder sind konform kovariant unter der Aktion der Möbiusgruppe $PSL(2,\mathbb{C})$ (globale konforme Transformationen auf S^2). In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Zwei-Punkt-Funktionen (Propagatoren) durch Invarianz unter den globalen konformen Transformationen vollständig festgelegt sind,

$$\langle\phi_a(z_1,\bar{z}_1)\phi_b(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{\delta_{a,b}}{(z_1-z_2)^{h_a+h_b}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_a+\bar{h}_b}}\,,$$

wobei eine multiplikative Konstante durch Normieren der Felder auf eins gesetzt wurde.

Zeigen Sie, dass durch globale konforme Invarianz die Drei-Punkt-Funktionen bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt sind. Überlegen Sie, wieviele freie komplexe Parameter $PSL(2,\mathbb{C})$ hat (was ist also die Dimension dieser Gruppe?). Wieviele der Koordinaten, von denen eine Korrelationsfunktion abhängt, kann man also gleichzeitig auf gewünschte Werte fixieren?

Leiten Sie mit diesen Vorüberlegungen ab, dass eine Vier-Punkt-Funktion vollständig bestimmt ist bis auf eine Funktion die nur von zwei Variablen abhängt. Zeigen Sie, dass also eine Vier-Punkt-Funktion die folgende Form haben muss:

$$\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{-h_i-h_j+H/3}(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^{-\bar{h}_i-\bar{h}_j+\bar{H}/3}\,F(x,\bar{x})\,,$$

wobei $H = h_1+h_2+h_3+h_4$ ist, und x das harmonische Verhältnis $x = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$ darstellt (entsprechend für die formal antiholomorphen Größen). Prüfen Sie nach, dass x invariant unter der Aktion von $PSL(2,\mathbb{C})$ ist.

2. Vertiefendes zur zentralen Ladung: Der Energie-Impuls-Tensor $T(z)$ ist kein primäres Feld (er ist nur quasi-primär). Berechnen Sie aus der Operatorproduktentwicklung von T mit sich selbst die Variation von T unter einer infinitesimalem konformen Transformation $\varepsilon(z)$. Die *globale* Form dieser Transformation induziert das folgende Transformationsverhalten von T:

$$T(w) \mapsto (\partial f)^2 T(f(w)) + \frac{c}{12}S(f,w)\,,$$

wobei $S(f,w)$ die sogenannte *Schwarzsche Ableitung* bezeichnet,

$$S(f,w) = \frac{(\partial f)(\partial^3 f) - \frac{3}{2}(\partial^2 f)^2}{(\partial f)^2}\,.$$

Es ist nicht ganz trivial, zu verstehen, wieso $S(f,w)$ hier auftreten muss, und warum dieser zusätzliche Term diese Form hat. Man kann sich aber folgendes klar machen: Führt man zwei konforme Transformationen f,g nacheinander aus, so sollte das Ergebnis der Transformation von T das gleiche sein, wie wenn man gleich mit $h = f\circ g$, d.h. $h(w) =$

$f(g(w))$, transformiert hätte. Rechnen Sie dies nach, ohne zunächst S einzusetzten, um die nicht-triviale Bedingung

$$S(f \circ g) = (\partial_w g(w))^2 S(f(g), g) + S(g(w), w)$$

zu erhalten. Prüfen Sie, dass die Schwarzsche Ableitung diese Bedingung in der Tat erfüllt. Man kann zeigen, dass die Schwarzsche Ableitung die einzige mögliche "Korrektur" ist, die dieser Verkettungsregel genügt.

Wenden Sie diese Ergebnisse nun an, um $T(z)$ von der komplexen Ebene auf den Zylinder umzurechnen. Verwenden Sie der Einfachheit halber die konforme Abbildung $z = \exp(w)$, wobei z eine Koordinate auf der komplexen Ebene sei, und w eine Koordinate auf dem Zylinder. Zur Kontrolle: $T_{\text{zyl}}(w) = z^2 T(z) - c/24$. Setzen Sie nun noch die Moden-Entwicklung $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n$ ein. Können Sie daraus die exakte Form für den Energie- und den Impulsoperator auf dem Zylinder ableiten? Machen Sie sich dafür zunächst einmal klar, ob und wie Sie eine Moden-Entwicklung auf dem Zylinder erhalten können. Warum macht die Definition

$$L_{\text{zyl},n} = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\, \mathrm{Im} w \, w^{n+1} T_{\text{zyl}}(w)$$

nur für die Translationsmoden Sinn? (Zur Erinnerung: In der komplexen Ebene waren der Energie- und der Impulsoperator gegeben durch $H = -(L_{-1} + \bar{L}_{-1})$ und $P = i(L_{-1} - \bar{L}_{-1})$).

Natürlich sind die singulären Terme von Operatorproduktentwicklungen von T_{zyl} mit sich selbst und mit primären Feldern auf dem Zylinder die gleichen, wie die von T in der komplexen Ebene. Allerdings ist die Definition der Moden von T_{zyl} nicht mehr so einfach. Die naive Definition

$$L_{\text{zyl},n} = \int \mathrm{d}w \exp(nw) T_{\text{zyl}}(w)$$

führt zu $L_{\text{zyl},n} = L_n - \frac{c}{24}\delta_{n,0}$. Wie sieht die Algebra der $L_{\text{zyl},n}$ aus, d.h. was ist $[L_{\text{zyl},n}\,,\, L_{\text{zyl},m}]$? Was bedeutet Ihr Ergebnis für die Moden $L_{\text{zyl},1}$, $L_{\text{zyl},-1}$, und $L_{\text{zyl},0}$. Versuchen Sie, eine Interpretation der zentralen Ladung im Lichte Ihrer Ergebnisse zu finden.