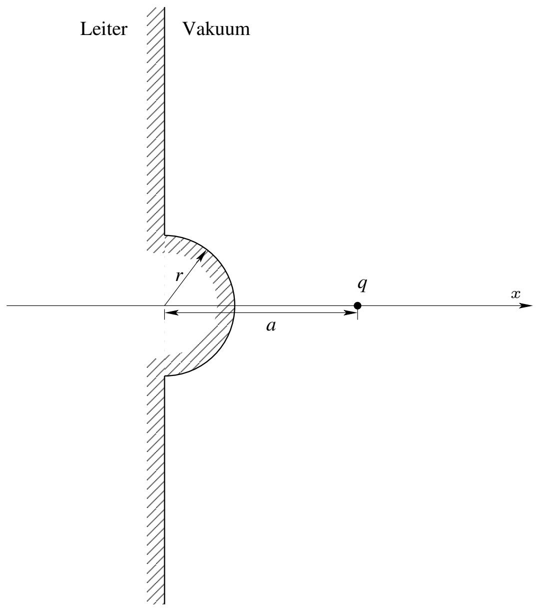
GREEN'SCHE FUNKTION

In der Vorlesung wurde die Green'sche Funktion eingeführt und gezeigt, dass sich mit ihr prinzipiell inhomogene partielle Differentialgleichungen lösen lassen. Dabei hängt die konkrete Form der Green'schen Funktion von den vorgegebenen Randbedingungen ab. Als Beispiel diente die Poisson-Gleichung.

[H10] *Spiegelladungen III* **[10 Punkte]**

Eine Ladung q befinde sich im Abstand a auf der x-Achse vor einer leitenden Ebene mit einer halbkugelförmigen Auswölbung vom Radius r, siehe Skizze. Auf der Leiteroberfläche ist das Potential $\Phi = 0$.



Bestimmen Sie die Green'sche Funktion im Raum der Ladung q mit Hilfe der Spiegelladungsmethode. Zeigen Sie, dass Ihr Ansatz die Randbedingung erfüllt. *Hinweis*: Man braucht in diesem Fall drei Spiegelladungen, welche in geeigneter Weise außerhalb des Gebietes, in dem sich die Ladung befindet, auf der x-Achse zu platzieren sind.

[H11] *Green'sche Funktion* **[$\mathbf{1+3+2+4=10}$ Punkte]**

Betrachten Sie ein Potentialproblem im Halbraum $z \geq 0$ mit Dirichlet Randbedingungen in der xy-Ebene (sowie im Unendlichen).

(a) Schreiben Sie die entsprechende Green'sche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ auf.

(b) Das Potential $\Phi(\vec{r})$ sei in der xy-Ebene vorgegeben: $\Phi = V = \mathrm{const}$ innerhalb eines Kreises mit Radius a um den Ursprung, sowie $\Phi = 0$ außerhalb dieses Kreises. Bestimmen Sie für $\Phi(\vec{r})$ an einem Punkt $\vec{r}$ im Halbraum $z > 0$ einen Integralausdruck in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z).

(c) Zeigen Sie, das $\Phi(\vec{r})$ auf der z-Achse (also für $\rho = 0$) gegeben ist durch

$$\Phi(\rho = 0, \varphi, z) = V \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) .$$

(d) Zeigen Sie, dass sich das Potential für große Abstände $\rho^2 + z^2 \equiv r^2 \gg a^2$ in eine Potenzreihe bezüglich r^{-1} entwickeln lässt. Die führenden Terme lauten

$$\Phi(\rho, \varphi, z) \approx \frac{Va^2}{2} \frac{z}{r^3} \left[1 - \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8r^4} + \dots\right] .$$

Zeigen Sie auch, dass die Ergebnisse von Teil (c) und (d) im gemeinsamen Gültigkeitsbereich konsistent sind.

[H12] *Green'sches Reziprozitätstheorem* **[10 Punkte]**

Betrachten Sie zwei *vollkommen unabhängige* Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ und $\tilde{\rho}(\vec{r})$ mit ihren zugehörigen elektrostatischen Potentialen $\Phi(\vec{r})$ und $\tilde{\Phi}(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass diese die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r\, \Phi(\vec{r})\tilde{\rho}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r\, \tilde{\Phi}(\vec{r})\rho(\vec{r}) \tag{1}$$

erfüllen. *Hinweis*: Sie können diese Gleichung ganz ohne Rechnung beweisen, in dem Sie sich überlegen, welche physikalische Größe durch den Ausdruck $\int \mathrm{d}^3 r\, \Phi(\vec{r})\tilde{\rho}(\vec{r})$ gegeben wird. Alternativ betrachten Sie $\int \mathrm{d}^3 r\, \nabla\Phi(\vec{r}) \cdot \nabla\tilde{\Phi}(\vec{r})$, integrieren auf zwei verschiedene Arten partiell, und verwenden die Poisson-Gleichung.

[H13*] *Green'sche Funktion der Helmholtz-Gleichung* **[10* Extrapunkte]**

Eine weitere, in der Physik sehr wichtige Gleichung ist die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Wir werden ihr später, bei der Behandlung der vollständigen inhomogenen Maxwell-Gleichungen, wieder begegnen. Offenbar geht diese Gleichung für $k = 0$ in die Poisson-Gleichung über. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$G_\pm(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kr}}{r}$$

die Green'schen Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d.h., dass

$$(\Delta + k^2)G_\pm(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r})\,.$$

Was stellen diese Green'schen Funktionen physikalisch dar?