Hausübung VI zur Vorlesung ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2011

Prof. Dr. Manfred Lein

Abgabe 23. Mai 2011 vor der Vorlesung — PD Dr. Michael Flohr

ELEKTRISCHE MULTIPOLE

In der Vorlesung wurde der elektrische Dipol eingeführt. Betrachtet man eine Ladungsverteilung aus der Ferne, so können wir die Ladungsverteilung durch ihre Multipolmomente annähern. In gröbster Näherung ist das der Monopolterm, der die Gesamtladung in einer Punktladung konzentriert. Die nächste Näherung ist das Dipolmoment, usw. Wir wollen hier dazu einige einfache Betrachtungen anstellen.

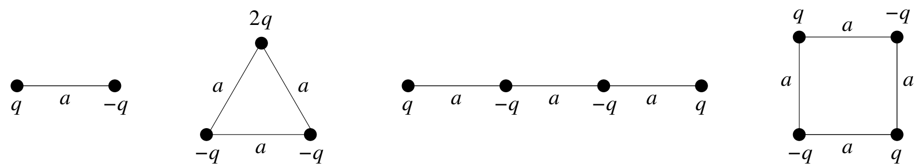
[H16] *Multipolentwicklung I* **[$5+5+10=20$ Punkte]**

Wir betrachten Ladungsverteilungen, die aus einer endlichen Anzahl von Punktladungen q_i an Stellen $\vec{r}^{(i)}$ bestehen. Das Monopolmoment ist einfach die Gesamtladung $q = \sum_i q_i$. Das Dipolmoment ist laut Vorlesung $\vec{p} = \sum_i \vec{r}^{(i)} q_i$. Wir wollen noch einen Schritt weiter gehen, und das Quadrupolmoment einführen. Dieses ist gegeben durch seine Komponenten

$$Q_{jk} = \sum_i (3r_j^{(i)} r_k^{(i)} - (\vec{r}^{(i)})^2 \delta_{jk}) q_i \,, \quad j,k \in \{1,2,3\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs ist, wenn die Gesamtladung verschwindet.

(b) Bestimmen Sie das elektrische Dipolmoment folgender Ladungsanordnungen:



(i) (ii) (iii) (iv)

(c) Berechnen Sie den Quadrupoltensor Q_{jk} für die Ladungsverteilungen (iii) und (iv). *Hinweis*: Sie können oft durch einfache geometrische Symmetrieüberlegungen darauf schließen, dass bestimmte Komponenten verschwinden müssen. Koordinatenursprung in der Mitte der Ladungsverteilung.

[H17*] *Multipolentwicklung II* **[10* Extrapunkte]**

Wir betrachten das Potential einer Ladungsverteilung aus endlich vielen Punktladungen,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}^{(i)}|}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Entwicklung von $\Phi(\vec{r})$ für große Abstände $r \gg 1$ in *kartesischen* Koordinaten gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{kl} Q_{kl}\frac{r_k r_l}{r^5} + \ldots\right)\,,$$

wobei wir die Definitionen aus [H14] verwendet haben.

[H18] *Kraft und Drehmoment auf einen Dipol* **[$5+5=10$ Punkte]**

Wir betrachten einen reinen Dipol. Sie erhalten einen reinen Dipol durch den Grenzübergang eines Diplos aus zwei entgegengesetzten Ladungen $\pm q$ mit Abstand a zueinander, wenn $a \to 0$ und $q \to \infty$, so dass $p = qa \equiv \mathrm{const}$ konstant bleibt.

(a) Berechnen Sie zunächst die Kraft und das Drehmoment auf einen Dipol aus zwei entgegengesetzten Ladungen $\pm q$, die zueinander den Abstand a haben, wenn sich dieser Dipol in einem externen elektrischen Feld befindet.

(b) Finden Sie nun die Kraft und das Drehmoment auf einen reinen Dipol in einem externen elektrischen Feld. Führen Sie dazu den oben beschriebenen Grenzübergang aus und beachten dabei, dass für sehr kleine a alle Terme qa^n, $n > 1$, unterdrückt sind.

Bemerkung: Es wird *nicht* vorausgesetzt, dass das externe elektrische Feld homogen ist!