

## ELEKTRISCHER DIPOL UND MULTIPOLENTWICKLUNG

In der Vorlesung wurde der elektrische Dipol, die sphärische Multipolentwicklung sowie die elektrostatische Energie behandelt. Dazu sehen wir uns ein paar Beispiele an:

**[H19] Multipolentwicklung** **[2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte]**

Ein homogen geladener, kreisförmiger Draht mit verschwindend kleinem Querschnitt liegt konzentrisch zum Ursprung in der  $xy$ -Ebene. Der Kreis soll Radius  $R$  haben und die Gesamtladung  $Q$  tragen.

- (a) Geben Sie das elektrostatische Potential entlang der  $z$ -Achse an.
- (b) Verwenden Sie Taylorentwicklungen, um das asymptotische Verhalten des Potentials aus (a) in den Fällen  $z \rightarrow 0$  und  $|z| \rightarrow \infty$  zu finden. Geben Sie jeweils die zwei ersten nichtverschwindenden Ordnungen an. *Zur Kontrolle:* Für  $|z| \rightarrow \infty$  gilt

$$\Phi(0, 0, z) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|z|} \left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right).$$

- (c) Bestimmen Sie nun das Potential auch außerhalb der  $z$ -Achse, indem Sie Kugelkoordinaten verwenden: Wie lauten jeweils die zwei führenden Terme im asymptotischen Verhalten für  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ ? *Hinweis:* Denken Sie an die Legendre-Polynome.
- (d) Geben Sie das asymptotische Verhalten auf der  $x$ -Achse für  $x \rightarrow 0$  und  $|x| \rightarrow \infty$  an (wieder jeweils die zwei führenden Terme).

**[H20] Dipolmoment** **[10 Punkte]**

Betrachten Sie ein System ähnlich zu [P18](a), aber mit einer Vollkugel. Berechnen Sie also das Dipolmoment einer Kugel mit Radius  $R$  bestehend aus zwei entgegengesetzt homogen geladenen Hälften. (Gesamte Ladung auf jeder Hälfte:  $Q$  bzw.  $-Q$ ).

**[H21] Elektrostatische Energie** **[10 Punkte]**

Die gesamte elektrostatische Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung kann entweder aus deren elektrischer Feldstärke oder aus deren Ladungsdichte und Potential berechnet werden (siehe Vorlesung). Zeigen Sie durch explizite Berechnung für den Fall einer homogen geladenen Kugel mit Ladung  $Q$  und Radius  $R$ , dass die beiden Ausdrücke die gleiche Energie liefern.