ELEKTRODYNAMIK IN MEDIEN

In der Vorlesung wurden die Größen $\vec{H}$ und $\vec{D}$ eingeführt, die zur Beschreibung magnetischer und elektrischer Felder in Medien verwendet werden. In dieser Übung betrachten wir als Beispiel ein ferroelektrisches Medium.

[H26] *Vorübung* **[$4 + 6 = 10$ Punkte]**
Eine Kreisscheibe mit Radius R liege in der xy-Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung und sei homogen geladen.

(a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
(b) Bestimmen Sie das elektrische Feld entlang der z-Achse.

[H27] *Ferroelektrischer Zylinder* **[$3 + 3 + 4 = 10$ Punkte]**
Ein Zylinder der Länge L und mit Radius R besitze eine permanente Polarisation $\vec{P}_0$, die innerhalb des Zylinders räumlich konstant und parallel zur Symmetrieachse gerichtet sei. Freie Ladungen seien nicht präsent, und außerhalb des Zylinders befinde sich Vakuum.

(a) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ als Funktion des Ortes.
(b) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Feldlinien des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$.
(c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ auf der Symmetrieachse des Zylinders, und zwar sowohl für innerhalb wie außerhalb des Zylinders. *Hinweis*: Denken Sie an die Vorübung [H26].

ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

Eine der großen Errungenschaften der Maxwellschen Theorie ist die Vorhersage der Existenz von elektromagnetischen Wellen.

[H28] *Wellengleichungen* **[$4 + 6 = 10$ Punkte]**

(a) Betrachten Sie die ein-dimensionale Wellengleichung
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)\,.$$
Zeigen Sie, dass *jede* Funktion der Form $f(x,t) = f(x - ct)$ eine Lösung dieser Gleichung ist.
(b) Betrachten Sie die drei-dimensionale Wellengleichung
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{x},t) = \Delta f(\vec{x},t)\,.$$
Zeigen Sie, dass die Kugelwellen $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$ mit $r = |\vec{x}|$ Lösungen sind. Welche Beziehung muss zwischen ω und k bestehen? *Hinweis*: Gehen Sie zu Kugelkoordinaten über und nehmen Sie an, dass die Lösung sphärisch symmetrisch ist. Dann trägt nur der Radialanteil des Laplace-Operators bei.

[H29*] *Helmholtz-Gleichung* **[10* Extrapunkte]**
Betrachten Sie nochmals die drei-dimensionale Wellengleichung
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{x},t) = \Delta f(\vec{x},t)\,.$$
Machen Sie einen Separationsansatz $f(\vec{x},t) = A(\vec{x})T(t)$ und führen Sie die Separationskonstante $-k^2$ ein. Zeigen Sie, dass $A(\vec{x})$ die Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2)A(\vec{x}) = 0$ erfüllt. Setzen Sie $\omega = kc$ und geben die Gleichung an, die $T(t)$ erfüllt. *Rein pädagogische Bemerkung*: In [H13*] haben Sie bereits eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung gefunden.