Präsenzübung X zur Vorlesung ELEKTRODYNAMIK | SoSe 2011

Prof. Dr. Manfred Lein
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

24. Juni 2011

FOURIERTRANSFORMATION

In der Vorlesung wurde die Fouriertransformation eingeführt, die ein sehr wichtiges Instrument der theoretischen Physik darstellt.

[P25] *Übergang zum Integral*

Wir betrachten die Rechteckfuntkion, definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad -a \le x \le a \\ 0 & \text{wenn} \quad |x| > a \end{cases} .$$

(a) Beginnen Sie mit dem vollständigen orthonormalen System $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp(\mathrm{i}n\pi x/L)$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit dem Sie periodische Funktionen im Intervall $x \in [-L, L]$ entwickeln können. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n in der Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n U_n(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \exp(-\mathrm{i}kx)$$

der Rechteckfunktion $f(x)$. Damit können Sie die ursprüngliche Funktion schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \tilde{f}(k) \exp(\mathrm{i}kx) .$$

(c) Vergleichen Sie nun die Fourierreihe mit der Fouriertransformation. Führen Sie dazu in der Fourierreihe in geeigneter Weise eine Größe k_n ein. Zeigen Sie dann, dass die Fourierreihe für unendlich große Intervalllängen $L \to \infty$ in die Fouriertransformation übergeht.

[P26] *Coulomb-Potential*

Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e^2}{r}$, also

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \frac{-e^2}{r} \exp(-\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r}) .$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie durch Ausintegrieren der Winkelvariablen ϑ und φ, dass die Fouriertransformierte eines Zentralpotentials $V(r) = V(|\vec{r}|)$ nur von $k = |\vec{k}|$ abhängt und in der Form

$$\tilde{V}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \exp(-\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r}) V(r) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r \sin(kr) V(r)$$

geschrieben werden kann.

(b) Beginnen Sie nun mit dem Yukawa-Potential $V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-mr)}{r}$. Führen Sie Kugelkoordinaten ein und zeigen Sie, dass $\tilde{V}(k) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{k^2+m^2}$ ist.

(c) Führen Sie nun den Grenzwert $m \to 0$ durch, um die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials zu erhalten. Warum scheitert die direkte Berechnung wie in (a)?

(d) Betrachten Sie die Poisson-Gleichung $\Delta \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\delta(\vec{r})$. Wie lautet die Fouriertransformation dieser Gleichung? Finden Sie die Fouriertransformation der Dirac'schen δ-Distribution und bestimmen Sie damit und mit der Lösung der Poisson-Gleichung im Fourierraum die Fouriertransformation des Coulomb-Potentials.