DISPERSION

Wir behandeln einen wichtigen Aspekt der Elektrodynamik, für den in der Vorlesung einfach keine Zeit mehr war.

[P31] *Elektromagnetische Wellen und Dispersion*
Die allgemeine Lösung der *homogenen* Wellengleichung lässt sich mit Hilfe der Fourier-Transformation leicht in folgender Form schreiben:

$$\vec{\psi}_\pm(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3k \frac{\vec{a}_\pm(\vec{k})}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega t)} .$$

Sei der Einfachheit halber $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $\vec{n}$ eine lineare Polarisationsrichtung, so dass $\vec{\psi}_\pm(\vec{r},t) = \psi_\pm(z,t)\vec{n}$. Dann ergibt sich

$$\psi_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, b(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz\pm\omega t)}$$

mit einer Gewichtsfunktion $b(k)$. Für *dispersive* Medien ist $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$ und damit $\omega = \omega(k)$, aber es gilt nicht unbedingt $\omega = ck$. Wir wollen nun den speziellen Fall betrachten, in dem die Welle nur Wellenlängen in einem kleinen Bereich um $k = k_0$ besitzt, dass also $b(k) \neq 0$ nur in einem kleinen Bereich um $k = k_0$ ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass näherungsweise

$$\psi_\pm(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z\pm\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\, b(k_0+q) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(z\pm v_g t)}$$

ist, wobei $q = k - k_0$, $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ und

$$v_g \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0} .$$

Hier ist v_g die sogenante *Gruppengeschwindigkeit*. Wie unterscheidet sich die Gruppengeschwindigkeit von der in der Vorlesung eingeführten Phasengeschwindigkeit? Was ist die physikalische Bedeutung?

(b) Sei nun die Gewichtsfunktion gegeben als

$$b(k) = \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{(\Delta k_0)^2}\right) .$$

Zeigen Sie, dass

$$\psi_\pm(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z\pm\omega_0 t)} \exp\left(-\frac{(\Delta k_0)^2}{16}(z\pm v_g t)^2\right) .$$

Wie sieht $|\psi_\pm|^2$ aus? Wie verhält sich $|\psi_\pm(z,t)|^2$ in der Zeit?