Präsenzübung VI zur Vorlesung ELEKTRODYNAMIK SoSe 2011

Prof. Dr. Manfred Lein
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

20. Mai 2011

VEKTORANALYSIS IN KUGELKOORDINATEN

In der Physik spielen krummlinige Koordinaten eine große Rolle. Wir üben hier nochmals exemplarisch die Kugelkoordinaten, und wie man in ihnen Vektoranalysis betreibt.

[P16] *Umrechnung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten*
Ein Punkt P in $\mathbb{R}^3$ sei einmal in kartesischen Koordinaten (x, y, z), und einmal in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gegeben.

(a) Drücken Sie die kartesischen Koordinaten als Funktionen in den Kugelkoordinaten aus.

(b) Wie lauten die Basisvektoren für Kugelkoordinaten, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\theta$ ausgedrückt in den Basisvektoren der kartesischen Koordinaten? *Hinweis*: Sie müssen die Parametrisierung nach der jeweiligen Koordinate ableiten und anschließend noch auf Länge eins normieren.

(c) Geben Sie die Jacobi-Matrix

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$$

an. Schreiben Sie $J = Sh$ mit $h = \mathrm{diag}(1, r, r\sin\theta)$ und geben Sie die Matrix S an. Diese ist eine reine Rotationsmatrix. Das Inverse von J ist übrigens gegeben als

$$J^{-1} = \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} .$$

Was bedeutet es, dass J^{-1} für $r = 0$ oder für $\theta \in \{0, \pi\}$ singulär wird? Geben Sie J^{-1} in kartesischen Koordinaten an.

(d) Geben Sie die Differentiale $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$ in Kugelkoordinaten an. Wie lautet demnach das Volumenelement in Kugelkoordinaten? Machen Sie sich klar, dass die Einheitsvektoren durch S ineinander umgerechnet werden können:

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)^t = S(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)^t.$$

Ein Vektor(feld) ist unabhängig vom Koordinatensystem. $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$. Wie rechnen sich demnach die Komponenten des Vektors $\vec{A}$ um?

(e) Die Differentiale lassen sich ganz ähnlich umrechnen:

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi)J^{-1} .$$

Geben Sie damit den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten an.

(f) Wenn Sie mit Hilfe des soeben bestimmten Nabla-Operators die Divergenz eines Vektorfeldes bestimmen, so müssen Sie beachten, dass der Operator sowohl auf die Koeffizienten, als auch auf die Basisvektoren wirkt, in die das Vektorfeld entwickelt wird. Wie lautet daher die Divergenz eines Vektorfeldes in Kugelkoordinaten?

[P17] *Vergleichendes Beispiel*
Weit entfernt von einem Dipol mit Dipolmoment $\vec{p}$ erzeugt dieser ein Potential

$$\Phi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} .$$

Berechnen Sie daraus das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = -\nabla\Phi_{\text{Dipol}}(\vec{r})$ einmal in kartesischen und einmal in Kugelkoordinaten. Legen Sie in beiden Fällen $\vec{p} = p\vec{e}_z$ in Richtung der z-Achse.