

## KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

Die Kugelflächenfunktionen  $Y_{l,m}$  sind für die Behandlung von Problemen mit sphärischer Symmetrie wichtig. Wir wollen hier den Umgang mit ihnen etwas üben.

**[P20]** Entwicklung in Kugelflächenfunktionen

- (a) Was können Sie über die Entwicklung einer Funktion  $f(\vec{r})$  in Kugelflächenfunktionen sagen, wenn  $f(\vec{r})$  jeweils eine der Relationen

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= f(-\vec{r}) \quad \text{oder} \\ f(\vec{r}) &= -f(-\vec{r}) \quad \text{oder} \\ f(\vec{r}) &= f(r, \theta) \quad \text{unabhängig von } \phi \end{aligned}$$

erfüllt?

- (b) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen  $f(\vec{r})$  nach Kugelflächenfunktionen bis einschließlich zur Ordnung  $l = 2$  in der Form  $f(\vec{r}) = \sum_{l,m} f_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$ . Sind diese Reihenentwicklungen exakt?

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= 32r^2 - 3xyz, \\ f(\vec{r}) &= \frac{r^2 - 4z + 3xy}{r^3} e^{-\kappa r} \quad \text{mit } \kappa > 0. \end{aligned}$$

- (c) Drücken Sie die Kugelflächenfunktionen  $Y_{l,m}$  bis zur Ordnung  $l = 2$  in kartesischen Koordinaten aus. Bestimmen Sie durch geeignete Linearkombinationen der  $Y_{l,m}$  einen vollständigen Satz reellwertiger Kugelflächenfunktionen  $\mathcal{Y}_{l,m}$ , und drücken Sie diese ebenfalls durch kartesische Koordinaten aus.

## MAGNETOSTATIK

Die Vorlesung hat mit der Magnetostatik begonnen. Wir wollen für ein einfaches Beispiel das Magnetfeld bestimmen.

**[P21]** Biot-Savart-Gesetz

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius  $R$  werde von einem Strom  $I$  durchflossen. Die Leiterschleife liege in der  $(x, y)$ -Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung.

- (a) Geben Sie die Stromdichte  $j(\vec{r})$  der Anordnung an. Verwenden Sie dazu ein Koordinatensystem, das der Symmetrie des Problems angepasst ist. Überlegen Sie sich, wie die Idealisierung des Drahtquerschnitts durch Delta-Funktionen ausgedrückt werden kann.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes das Magnetfeld  $\vec{B}$  auf der  $z$ -Achse.