

Name: _____

#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Σ
Pkte								

Matrikelnr.: _____

[K0] Kurzfragen **[1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

- (a) Wie lautet die allgemeinste Lösung der Wellengleichung in zwei Dimensionen, $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t, x) = 0$?
- (b) Was können Sie qualitativ zur Fouriertransformation einer Gaussglocke $g(x) = \exp(-x^2)$ sagen?
- (c) Wie ist die Energie des elektromagnetischen Feldes gegeben?
- (d) Wie ist das magnetische Dipolmoment definiert?
- (e) Was besagt die Poisson-Gleichung?
- (f) Wie ist der Maxwell'sche Feldstärketensor F_{mn} durch das Viererpotential A_m gegeben?

[K1] Quadrupoltensor **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Ein Quadrupoltensor habe die Form $Q = q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

[K2] Integralsätze **[3 Punkte]**

Bestimmen Sie mit dem Satz von Stokes durch Integration über Kreisflächen das magnetische Feld innerhalb einer zylindersymmetrischen, zeitunabhängigen Stromverteilung.

[K3] Fouriertransformation **[1 + 1 + 2 = 4 Punkte]**

Berechnen Sie die Fouriertransformation $\tilde{g}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} g(\vec{x})$ der Funktion

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}.$$

- (a) Wählen Sie die z -Achse in Richtung von \vec{k} und drücken Sie das Skalarprodukt im Exponenten in Kugelkoordinaten aus. Die Integration über φ ist nun ganz einfach.
- (b) Die Integration über $\cos \theta$ lässt sich nun elementar ausführen.
- (c) Führen Sie die abschließende Integration über r aus.

[K4] Residuensatz **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Betrachten Sie das Integral $\oint_{\Gamma} dz \frac{-2i}{z^2 + 6z + 1}$, wobei Γ der im Gegenzeigersinn durchlaufene Einheitskreis sei, parametrisiert als $\theta \mapsto z(\theta) = e^{i\theta}$.

- (a) Berechnen Sie dieses Integral mit dem Residuensatz. Geben Sie dazu an, wo die Pole des Integranden liegen und welchen Wert das Residuum des Pols hat, der im Einheitskreis liegt.
- (b) Zeigen Sie, dass dieses komplexe Wegintegral dem folgenden reellen Integral $\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{3 + \cos \theta}$ gleich ist.

[K5] Ableitungen **[3 Punkte]**

Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad} \frac{1}{r(r-z)}$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist.

[K6] Elektromagnetisches Feld **[1 + 2 + 1 = 4 Punkte]**

Im Vakuum hat das magnetische Feld $\vec{B}(t, \vec{x})$ einer ebenen, elektromagnetischen Welle die Form

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \Re \left(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \right),$$

wobei \Re den Realteil bezeichnet.

- (a) Welche Bedingung müssen die komplexe Amplitude \vec{B}_0 und der Wellenvektor \vec{k} erfüllen, damit die Maxwellgleichung $\text{div} \vec{B} = 0$ gilt?
- (b) Welchen Wert hat das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{x})$, das die Vakuum-Maxwellgleichungen $\text{div} \vec{E} = 0$ und $\text{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 0$ erfüllt?
- (c) Welchen Wert muss die Kreisfrequenz ω haben, damit die Maxwellgleichung $\text{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ gilt?