Klausur zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK SoSe 2013

Prof. Dr. Eric Jeckelmann

29.07.2013, 12:15-14:15 Uhr PD Dr. Michael Flohr

KLAUSUR

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Name, Vorname und Matrikelnummer! Bitte verwenden Sie nur Kugelschreiber oder Tintenfüller, *keinen* Bleistift! Füllen Sie unbedingt das Deckblatt aus und geben es zusammen mit Ihrer Klausur ab. Die Klausur ist mit ≥ 20 Punkten bestanden – viel Erfolg!

[K1] *Poisson-Gleichung* **[$2+2+2+2+2 = 10$ Punkte]**

Die Poisson-Gleichung reduziert sich bei einer radialsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Betrachten Sie die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \frac{q}{8\pi\sigma^3}\mathrm{e}^{-r/\sigma}$.

(a) Wie groß ist die Gesamtladung $Q = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r\, \rho(\vec{r})$.

(b) Machen Sie den Ansatz $\phi(\vec{r}) = y(r)/r$. Welche Differentialgleichung erfüllt $y(r)$? *Hinweis*: $\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \ldots$ in Kugelkoordinaten.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für $y(r)$ an.

(d) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz $y(r) = f(r)\mathrm{e}^{-r/\sigma}$.

(e) Geben Sie damit die korrekte Lösung $\phi(\vec{r})$ für $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ mit den Randbedingungen $\phi(r \to \infty) = 0$ und $|\phi(r \to 0)| \to \mathrm{const} < \infty$ an.

[K2] *Multipolentwicklung* **[$2+4+4 = 10$ Punkte]**

Der Quadrupoltensor ist definiert als $Q_{jk} = \sum_n q_n\Big(3r_{n,j}r_{n,k} - (\vec{r}_n)^2\delta_{jk}\Big)$. Es gibt die folgenden Punktladungen: Ladungen e bei $\vec{r}_1 = (1,1,0)$ und $\vec{r}_2 = (-1,-1,0)$. Ladungen $2e$ bei $\vec{r}_3 = (1,-1,0)$ und $\vec{r}_4 = (-1,1,0)$. Ladungen $-e$ bei $\vec{r}_5 = (0,0,1)$ und $\vec{r}_6 = (0,0,-1)$.

(a) Geben Sie die Gesamtladung q und das Dipolmoment $\vec{p}$ an.

(b) Berechnen Sie den Quadrupoltensor Q. Beachten Sie mögliche Symmetrien.

(c) Diagonalisieren Sie Q, geben Sie also die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren an.

[K3] *Fouriertransformation* **[$7+3 = 10$ Punkte]**

Wir betrachten die Funktion $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mu r}$ für $\mu > 0$.

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\phi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3r\, \phi(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$. *Hinweis*: Verwenden Sie Kugelkoordinaten und integrieren Sie zuerst über die Winkel.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials, mit Hilfe des Limes $\mu \to 0$.

[K4] *Eichinvarianz & Kontinuitätsgleichung* **[$3+3+4 = 10$ Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass sich die elektromagnetischen Felder nicht ändern, wenn wir die Potentiale gemäß $\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\Lambda$ ändern, wobei Λ ein beliebiges Skalarfeld ist.

(b) Zeigen Sie, dass es immer ein Λ gibt, so dass $\mathrm{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi' = 0$ gilt. *Hinweis*: Leiten Sie eine Differentialglleichung für Λ her. Diese sollten Sie wiedererkennen, und daraus schließen können, dass es dafür auch eine Lösung gibt.

(c) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung $\mathrm{div}\,\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = 0$ aus den Maxwell-Gleichungen her.

[K5] *Ebene Wellen* **[$2+2+2+2+2 = 10$ Punkte]**

Das elektrische Feld einer monochromatischen ebenen Welle hat die Form $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$.

(a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum in Abwesenheit von Ladungen und Strömen an.

(b) Welche Bedingung müssen der Vektor $\vec{E}_0$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen, damit es keinen Widerspruch zu den Maxwell-Gleichungen gibt?

(c) Verwenden Sie in geeigneter Weise die Maxwell-Gleichungen, um das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ anzugeben.

(d) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen eine Beziehung für die Kreisfrequenz $\omega = \omega(\vec{k})$ her.

(e) Zeigen Sie: $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ bilden ein orthogonales System. In welcher Beziehung stehen $|\vec{E}|$ und $|\vec{B}|$?

[K6] *Dipolstrahlung* **[$5+5 = 10$ Punkte]**

Der führende Beitrag einer Strahlungsquelle, die sehr klein gegenüber der betrachteten Wellenlänge ist, ist in der Fernzone durch $\vec{E}(\vec{r},t) = c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{B}(\vec{r}) \times \vec{n}$ und $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi}(ck^2)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(\vec{n} \times \vec{p})$ gegeben. Hierbei ist $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ und $\vec{p}$ ist das Dipolmoment.

(a) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiestromdichte $\overline{\vec{S}(\vec{r})}$ des elektromagnetischen Feldes.

(b) Integrieren Sie die Energiestromdichte über die Oberfläche einer Kugel mit Radius R. Welche Beobachtung machen Sie?