Prof. Dr. Eric Jeckelmann
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe am 21.06.2013 vor der Übung

ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN UND SCHWINGUNGEN

Eine der großen Triumphe der theoretischen Physik ist die Vorhersage der Existenz elektromagnetischer Wellen im Vakuum. Hier studieren wir ein paar einfache Beispiele solcher Wellen und Schwingungen.

[H25] *Kugelwellen* **[$3 + 3 = 6$ Punkte]**

Eine Kugelwelle ist ähnlich zu einer ebenen Welle (siehe [H22]) definiert, nur dass die Wellenfronten radialsymmetrisch sind, und die Amplitude der Welle daher radial wie das Coulomb-Potential abfällt:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \exp\Big(\mathrm{i}(kr - \omega t)\Big) \quad \text{mit} \quad \omega = kc\,,\ r = |\vec{r}|\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Psi(\vec{r}, t)$ für $r \neq 0$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist.

(b) Plotten Sie mit MATHEMATICA den Realteil von $\Psi(\vec{r}, t)$ als Funktion von r für $t = 0$, $t = T/4$ und $t = T/2$, wobei T die Periode der Welle ist.

[H26] *Schwingkreis* **[$3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte]**

Wir betrachten einen Stromkreis ohne äußere Spannungsquelle, der aus in Serie geschaltetem Widerstand $R \geq 0$, Spule (Induktion) $L > 0$ und Kondensator (Kapazität) $C > 0$ besteht. Die Differentialgleichung für den Strom I ist dann

$$L\,\dot{I} + R\,I + \frac{Q}{C} = 0\,, \quad I = \dot{Q}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung mit dem Ansatz $Q(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$. *Hinweis*: Bedenken Sie, dass allgemein $\alpha \in \mathbb{C}$ sein kann.

(b) Diskutieren Sie den Fall schwacher Dämpfung, $R^2 < 4\frac{L}{C}$ sowie den Fall starker Dämpfung, $R^2 > 4\frac{L}{C}$.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung mit MATHEMATICA und plotten Sie die Lösungen für die Fälle schwacher und starker Dämpfung und einer sinnvollen Wahl der Anfangsbedingungen.

(d) Untersuchen Sie mit MATHEMATICA auch den Fall kritischer Dämpfung $R^2 = 4\frac{L}{C}$. Warum erhalten Sie nicht das korrekte Ergebnis, wenn Sie in der Lösung (c) einfach für R den kritischen Wert einsetzen? Wie können Sie die korrekte Lösung erhalten?

[H27] *Gauß'sches Wellenpaket* **[$3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 4^* = 14 + 4^*$ Punkte]**

Wir betrachten die eindimensionale, homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x, t) = 0\,. \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie explizit, dass die ebenen Wellen

$$\Psi_k(x, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)}\,, \quad k \in \mathbb{R}\,,$$

Lösungen der Wellengleichung $(*)$ sind. Bestimmen Sie die Beziehung zwischen Frequenz ω und Wellenzahl k. Geben Sie zwei reelle, nicht konstante, Lösungen der Gleichung $(*)$ an.

(b) Wir betrachten nun eine Überlagerung von ebenen Wellen,

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, q(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k(x - ct)}\,,$$

mit der Gauss-Verteilung als Gewichtsfunktion,

$$q(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(- \frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2}\Big)\,.$$

Berechnen Sie das Maximum $q_{\max}$, die Norm $N_q = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, q(k)$, den Mittelwert $\bar{k} = \frac{1}{N_q}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, k\, q(k)$ und die Breite Δk. Die Breite wird über das Schwankungsquadrat

$$\Delta k^2 = \overline{k^2} - \bar{k}^2\,, \quad \overline{k^2} = \frac{1}{N_q}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, k^2\, q(k)\,,$$

definiert. Erstellen Sie einen Graphen von $q(k)$ und zeichnen Sie $q_{\max}$, $\bar{k}$ und Δk darin ein.

(c) Berechnen Sie nun das Gauß-Wellenpaket $\Psi(x, t)$. *Hinweis*: Es ist für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \exp\Big(- \frac{(k - \alpha)^2}{2\sigma^2}\Big) = 1\,.$$

(d) Berechnen Sie Maximum $\Psi_{\max}$, Norm N_Ψ, Mittelwert $\bar{x}$ und Breite Δx vom absoluten Betrag $|\Psi(x, t)|$.

(e) Vergleichen Sie die Breiten des Gauß'schen Wellenpaketes, Δx, und der Gauß-Verteilung der Wellenzahlen, Δk. Diskutieren Sie die Grenzfälle $\sigma \to 0$ und $\sigma \to \infty$.

(f*) *Zusatzaufgabe*: Zeichnen Sie den Realteil $\Re\mathrm{e}\,\Psi(x, t)$ für $\lambda = 10\Delta x$, $\lambda \approx \Delta x$ und $\lambda = \frac{1}{10}\Delta x$, wobei $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$ die "mittlere" Wellenlänge ist. Unter welcher Bedingung ergibt sich eine ein-dimensionale ebene Welle, bzw. eine Gauß-Glocke?

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!