FOURIER-TRANSFORMATION

Die Fouriertransformation gehört zu den leistungsfähigsten Werkzeugen der Mathematik, um lineare Differentialgleichungen zu analysieren. Mit ihrer Hilfe lassen sich analytische Fragestellungen manchmal rein algebraisch behandeln.

[H28] *Fourier-Reihe* **[2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte]**

Bevor wir uns der Fourier-Transformation zuwenden, betrachten wir die einfachere Fourier-Reihe, die bei periodische Funktionen Anwendung findet.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Rechteckschwingung

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x < \frac{p}{2} \\ -h & \frac{p}{2} < x < p \end{cases}, \quad f(x+p) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Plotten Sie $f(x)$ und die partiellen Summen

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi n\, x/p}$$

für $N = 2, 3, \ldots$ mit der Hilfe von MATHEMATICA.

(c) Die Sägezahnschwingung ist definiert durch

$$g(x) = \left(\frac{2x}{p} - 1\right) h\,, \quad x \in [0, p]\,, \quad g(x+p) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Für $p = 2\pi$ und $h = 1$ ist ihre Fourier-Reihe

$$g(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}\,.$$

Geben Sie die Fourier-Reihe für beliebige p und h an. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der Fourier-Reihe der Rechteckschwingung.

(d) Plotten Sie $g(x)$ und die partiellen Summen $g_N(x)$ für $N = 1, 2, 3, \ldots$ mit MATHEMATICA.

[H29] *Fourier-Transformation* **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Sei $\vec{V}(\vec{k}, \omega)$ die Fourier-Transformierte des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r}, t)$.

(a) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}(\vec{r}, t) &\overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} -\mathrm{i}\omega\, \vec{V}(\vec{k}, \omega)\,, \\ \operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}, t) &\overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} +\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{V}(\vec{k}, \omega)\,, \\ \operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}, t) &\overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} +\mathrm{i}\vec{k} \times \vec{V}(\vec{k}, \omega)\,. \end{aligned}$$

(b) Folgern Sie mit (a) die Maxwell-Gleichungen für die Fourier-Transformierten der elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$, $\vec{B}(\vec{k}, \omega)$ und der Quellen $\rho(\vec{k}, \omega)$, $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$.

[H30] *Wellenpaket* **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Jetzt berechnen wir mal ein paar richtige Fourier-Transformationen.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $f(k, \omega)$ des Exponentialwellenpaketes

$$f(x, t) = \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-|x-ct|/\lambda}\,.$$

(b) Folgern Sie daraus die Fourier-Transformierte $g(k, \omega)$ des Lorentz-Wellenpaketes

$$g(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x - ct)^2}\,.$$

[H31] *Polarisation* **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Ein Linear-Polarisationfilter lässt Licht durch, das in Richtung $\vec{L} = \cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y$ polarisiert ist, und absorbiert das komplementär polarisierte Licht. Ein monochromatischer Lichtstrahl mit Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_z$ und Intensität I treffe auf den Filter auf. Berechnen Sie den Anteil des Lichtes, der durchgelassen (transmittiert) wird, wenn der Lichtstrahl folgendermaßen polarisiert ist:

(a) linear polarisiert in der Richtung $\vec{e}_x$,

(b) rechts-zirkular polarisiert.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!