
DISPERSION, REFLEKTION, REFRAKTION & INTERFERENZ

Elektromagnetische Wellen zeigen natürlich all die Eigenschaften, die wir aus der Optik kennen – denn umgekehrt ist es ja so, dass diese phänomenologischen Sachverhalte im Verhalten der elektromagnetischen Wellen, wie es durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben wird, begründet liegt.

[H32] *Brechung und Reflexion* **[$4+4=8$ Punkte]**

Wir betrachten einen monochromatischen Lichtstrahl, gegeben durch Wellenvektor und Amplitude der elektrischen Komponente $(\vec{k}, \vec{E}_0)$, der sich in einem ungeladenen Isolator mit Brechungsindex $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r,1}\mu_{r,1}}$ ausbreite. Der Lichtstrahl treffe nun auf eine ebene Grenzfläche zu einem anderen ungeladenen Isolator mit Brechungsindex $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r,2}\mu_{r,2}} \neq n_1$. Ein Teil des Lichtes wird zurück in das erste Medium reflektiert, der Rest breitet sich in dem zweiten Medium aus.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl der reflektierte (R) Lichtstrahl, als auch der transmittierte (T), monochromatisch sind, und bestimmen Sie $(\vec{k}_R, \vec{E}_{0,R})$ und $(\vec{k}_T, \vec{E}_{0,T})$.

(b) Beweisen Sie das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz.

[H33] *Interferenz* **[$2+2+2+2+2+2=12$ Punkte]**

Zwei identische Punktquellen an den Positionen $\vec{q}_1 = \frac{a}{2}\vec{e}_x$ und $\vec{q}_2 = -\frac{a}{2}\vec{e}_x$ erzeugen Kugelwellen

$$\psi_j(\vec{r}, t) = A\frac{1}{r_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_j - \omega t)}, \quad j = 1, 2,$$

mit $\vec{r}_j = \vec{r} - \vec{q}_j$, $j = 1, 2$, und $k = \frac{2\pi}{\lambda} > 0$, Ein Schirm befindet sich an der Position $y = d$, parallel zur xz-Ebene. $A \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Intensität der beiden Quellen, $I_j(x, z) = |\psi_j(\vec{r}, t)|^2$, $j = 1, 2$, auf dem Schirm.

(b) Berechnen Sie die Intensität der Gesamtquelle $I(x, z) = |\psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)|^2$ auf dem Schirm.

(c) Erstellen Sie `DensityPlots` von $I_1(x, z)$, $I_1(x, z) + I_2(x, z)$ und $I(x, z)$ mit Hilfe von MATHEMATICA für $d = 5$, $a = 1$ und $\lambda = 0.2$.

(d) Zeigen Sie, dass $I(x) = 2(I_1 + I_2)\cos^2(\pi\frac{ax}{\lambda d})$ für $d \gg |z|$ und $d \gg |x \pm \frac{a}{2}|$ ist.

(e) Plotten Sie $I_1(x, z = 0)$, $I_2(x, z = 0)$, $J(x) = I_1(x, z = 0) + I_2(x, z = 0)$, $2J(x)$ und $I(x)$ für $d = 10$, $a = 1$ und $\lambda = 0.1$ mit Hilfe von MATHEMATICA.

(f) Drücken Sie die Intensität $I(x)$ als Funktion des Winkel α zwischen $\vec{r}$ und der y-Achse aus.

[H34] *Dispersion* **[$3+3+6+4^* = 12+4^*$ Punkte]**

Unter Dispersion versteht man die Abhängigkeit einer Größe von der Wellenlänge. Ein Signal können wir uns mit Hilfe der Fourier-Transformation als Überlagerung von periodischen Komponenten unterschiedlicher Wellenvektoren vorstellen. Ist dabei ω nicht linear von $\vec{k}$ abhängig, so wird sich das Aussehen des Signals mit der Zeit verändern. Je nach Dispersionsrelation $\omega(\vec{k})$ wird z.B. ein Gauß-Wellenpaket zerfließen, während sich sein Mittelpunkt mit der Zeit vorwärts bewegt. Die folgenden Aufgaben sind vollständig in MATHEMATICA zu lösen!

(a) Definieren Sie ein ein-dimensionales Gauß-Wellenpaket $g(k)$, zentriert um k_0 mit der Breite Δk, dessen Fläche auf eins normiert ist, und plotten Sie es.

(b) Führen Sie eine Fourier-Transformation von $g(k)$ aus, und plotten Sie den Realteil der Fourier-Transformierten. Welche Funktion ergibt sich, und durch was ist ihre "Breite" gegeben?

(c) Erzeugen Sie ein ein-dimensionales, zeitabhängiges Wellenpaket als Überlagerung unendlich vieler ebener Wellen

$$\phi(k, x, \omega, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)}$$

wie folgt:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, g(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)}.$$

Benutzen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{1}{2}k^2$ und wählen Sie $g(k)$ aus Aufgabenteil (a). Was ergibt sich in diesem Fall für die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit? Vergleichen Sie dies mit den Resultaten, die sich für die lineare Dispersionsrelation $\omega(k) = k$ aus [H27] ergeben.

(d*) Animieren Sie (mit `Manipulate`) das Zerfließen eines Wellenpaketes: Plotten Sie dazu $|\psi(x - vt, t)|^2$ mit $k_0 = 1$ und $\Delta k = 1$. Hierbei soll v so gewählt werden, dass der Wellenberg immer im Mittelpunkt ist. Begründen Sie den Wert der Geschwindigkeit v, den Sie verwenden.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!