

RETARDIERTE POTENTIALE UND DIPOLSTRAHLUNG

Eine der bemerkenswertesten Konsequenzen der Maxwell-Gleichungen ist die Tatsache, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Felder abstrahlen. Der technische Nutzen dieser Konsequenz ist heute so unvorstellbar groß und so unverzichtbar, dass ein auch nur kurzfristiges Außerkräftsetzen uns wohl in die Steinzeit zurückwerfen würde.

[P4] Retardierte Potentiale **[4* + 5* = 9* Punkte]**

Wir betrachten die inhomogene Wellengleichung $\square\psi(\vec{r}, t) = -\sigma(\vec{r}, t)$. Wir versuchen, diese direkt zu integrieren.

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass sich der bekannte Ansatz für die Poisson-Gleichung, $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ auf $(\Delta + k^2)\frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ verallgemeinern lässt.
- (b) Lösen Sie nun mit dem Ansatz $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \psi_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, $\sigma(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ die inhomogene Wellengleichung.

[P5] Elektrische Dipolstrahlung **[2* + 2* + 2* + 2* + 2* + 2* + 2* = 14* Punkte]**

Das Vektorpotential räumlich begrenzter zeitlich oszillierender Ladungs- und Stromverteilungen, die sehr viel kleiner als die Wellenlänge der abgestrahlten Felder sind, hat einen Term $\vec{A}_1 = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')$. Diesen untersuchen wir nun weiter.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass \vec{A}_1 die Form $\vec{A}_1(\vec{r}) = -i\omega \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}$ hat, wobei \vec{p} das elektrische Dipolmoment ist.
- (b) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}_1(\vec{r})$. Wie sehen die Feldlinien aus, wenn $\vec{p} = p\vec{e}_z$ ist? Welche Symmetrie hat das Feld? Zeigen Sie, dass das Feld transversal ist.
- (c) Zeigen Sie, dass im Vakuum die Phasengeschwindigkeit von $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$ größer als c ist.
- (d) Berechnen Sie aus \vec{B}_1 das elektrische Feld. Ist \vec{E}_1 rein transversal, oder nicht?
- (e) Betrachten Sie den Fall, dass $r \gg \lambda$, also $kr \gg 1$ ist. Überlegen Sie, dass damit $k^2/r \gg k/r^2 \gg 1/r^3$ ist, und vereinfachen damit die Felder \vec{B}_1 und \vec{E}_1 . Zeigen Sie, dass in der Strahlungszone \vec{E}_1 transversal ist, und \vec{E}_1 , \vec{B}_1 und \vec{r} lokal ein orthogonales Dreibein bilden.
- (f) Berechnen Sie die Energiedichte und die zeitlich gemittelte Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes in der Fernzone. Zeigen Sie, dass $\vec{S}_1(\vec{r}) = \frac{c}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon_r} \frac{(k^2p)^2}{r^2} \sin^2\vartheta \vec{n}$ mit $\vartheta = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{p})$ und $\vec{n} = \vec{r}/r$.
- (g) Betrachten Sie abschließend die Nahzone $kr \ll 1$, Wie vereinfachen Sie nun die Felder? Welches Feld ist in der Nahzone dominant?