Übungsblatt II zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK SoSe 2013

Prof. Dr. Eric Jeckelmann
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe am 19.04.2013 in der Übung

VEKTORANALYSIS

Die Vektoranalysis und insbesondere die Integralsätze gehören zu den wichtigsten Handwerkszeugen bei der Behandlung von Feldtheorien wie der Elektrodynamik.

[H1] *Identitäten der Vektoranalysis* **[3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte]**

Wir betrachten Differentialoperatoren wie Divergenz, Rotation und Gradient für Produkte von Vektorfeldern. Beweisen Sie die folgenden Relationen für beliebige ausreichend oft differenzierbare Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$, $\vec{b}(\vec{r})$ und skalare Felder $\phi(\vec{r})$, wobei wir das Argument der Übersichtlichkeit halber im folgenden weglassen:

(a) $\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$.

(b) $\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a}) + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b})$.

(c) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\phi = \nabla\times(\nabla\phi) = 0$ und $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0$.

(d) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{a}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{a}$.

[H2] *Anwendung von Integralsätzen* **[3 + 3 + 1 + 3 + 3 = 13 Punkte]**

In den folgenden Aufgaben können die auftretenden Integrale mit Hilfe von Integralsätzen leicht ausgewertet werden.

(a) Es sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein *konservatives* Kraftfeld. Zeigen Sie, dass das Flächenintegral

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\times\vec{F}(\vec{r})$$

über die geschlossene Oberfläche ∂V eines beliebigen Volumens V immer verschwindet. *Hinweis*: Machen Sie vom Gauß'schen Satz für ein Vektorfeld $\vec{E} = \vec{c}\times\vec{F}$ Gebrauch, wobei $\vec{c}$ ein konsanter Vektor ist.

(b) Betrachten Sie einen Zylinder der Höhe $2h$ und mit Radius R. Der Mittelpunkt des Zylinders sei der Koordinatenursprung. Berechnen Sie zunächst ohne Verwendung des Gauß'schen Satzes den Fluss des Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r}) = \alpha\vec{r}$ mit α konstant durch die gesamte Zylinderoberfläche. *Hinweis*: Berechnen Sie dazu zunächst in einer geeigneten Parametrisierung das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\vec{f}$ der Zylinderoberfläche sowohl für Mantel als auch für Deckel und Boden.

(c) Bestätigen Sie das Ergebnis von (b) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes.

(d) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius R, deren Zentrum im Koordinatenursprung liegt, für die folgenden Fälle:

$$\vec{a}(\vec{r}) = 3\frac{\vec{r}}{r^2}\,, \quad \vec{a}(\vec{r}) = (3z, x, 2y)\,.$$

(e) Visualisieren Sie die zwei Vektorfelder aus (d) mit Hilfe von MATHEMATICA.

[H3] *Quellen und Wirbel* **[4 + 3 = 7 Punkte]**

Vektorfelder, die ausreichend schnell im Unendlichen verschwinden und überall im Raum definiert sind, lassen sich in Quellen- und Wirbel-Anteile zerlegen. Das ist oft nützlich, um grundlegende Eigenschaften von Vektorfeldern zu erschließen.

(a) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{J}{2\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R^2}\hat{e}_\varphi & \text{falls } \sqrt{x^2+y^2} < R \\ \frac{J}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{e}_\varphi & \text{falls } \sqrt{x^2+y^2} \geq R \end{cases},$$

wobei der Strom J und R reelle Konstanten bezeichnen. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{B}$. *Hinweis*: $\hat{e}_\varphi = (-y, x, 0)/\sqrt{x^2+y^2}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(b) Visualisieren Sie das Vektorfeld $\vec{B}$ aus (a) sowie seine Rotation, mit Hilfe von MATHEMATICA.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!