MAGNETOSTATIK II

In der Vorlesung wurde im Rahmen der Magnetostatik der Satz von Stokes behandelt, das Vektorpotential eingeführt, sowie das fundamental wichtige Konzept der Eichsymmetrie vorgestellt.

[H26] *Rotierende geladene Kugel* **[2 + 4 + 4 = 10 Punkte]**

Eine Kugelschale vom Radius R trage die Ladung Q, die homogen auf der Oberfläche verteilt sei, und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$.

(a) Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})\varrho(\vec{r})$ mit $v(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

(b) Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ der Kugel, das analog zum elektrischen Dipolmoment definiert ist als

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\,.$$

(c) Die Kugelschale habe eine homogene Massenbelegung mit Gesamtmasse M. Bestimmen Sie das gyromagnetische Verhältnis γ, d.h., das Verhältnis des magnetischen Moments zum mechanischen Drehimpuls $\vec{L} = J\vec{\omega}$. *Hinweis*: Das Trägheitsmoment einer Kugelschale bezüglich der z-Achse ist

$$J = \int \mathrm{d}^3r\, \varrho_{\mathrm{mat}}(r)(x^2 + y^2)\,,$$

wobei $\varrho_{\mathrm{mat}}(r)$ die Massendichte der Kugelschale ist.

[H27] *Stromdurchflossener Zylinder* **[5 + 5 = 10 Punkte]**

Ein unendlich langer Zylinder (Radius R) führe eine homogene Stromdichte $\vec{j}$ parallel zur Zylinderachse.

(a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ außerhalb des Zylinders, also für Abstände $r_\perp > R$ von der z-Achse, mit Hilfe des Satzes von Stokes (Ampèresches Durchflutungsgesetz).

(b) Wie lautet die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ im Innern des Zylinders, also für $r_\perp < R$?

[H28] *Magnetischer Monopol* **[5 + 4 + 1 = 10 Punkte]**

Wenn es einen magnetischen Monopol der Ladung $4\pi g$ gäbe, der im Ursprung ruht, besäße er eine magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\, g}{r^2}\vec{e}_r$. Da diese außerhalb $\vec{r} = 0$ divergenzfrei ist, lässt sie sich in zusammenziehbaren Gebieten, die $\vec{r} \neq 0$ nicht enthalten, als Rotation eines Vektorpotentials schreiben. Zum Beispiel lässt sich die magnetische Flussdichte außerhalb der positiven z-Achse als $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_S$ und außerhalb der negativen z-Achse als $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_N$ darstellen (hierbei stehen S bzw. N für Süd bzw. Nord). Konkret gilt

$$\vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{\mu_0\, g}{r(r-z)}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \vec{A}_N(\vec{r}) = \frac{\mu_0\, g}{r(r+z)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Zeigen Sie dies, indem Sie $\mathrm{rot}\,A_S$ außerhalb der z-Achse berechnen und mit $\mu_0\, g\,\vec{e}_r/r^2$ vergleichen.

(b) Bestätigen Sie, dass sich beide Vektorpotentiale im gemeinsamen Gültigkeitsbereich ($x^2 + y^2 > 0$) nur um eine Eichtransformation unterscheiden,

$$\vec{A}_N(\vec{r}) - \vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{2\,\mu_0\, g}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,\mu_0\, g\,\mathrm{grad}\,\chi(\vec{r})\,, \qquad \chi(\vec{r}) = \arctan\frac{y}{x}\,.$$

(c) Wieso erfüllt demnach $\mathrm{rot}\,\vec{A}_N = \mu_0\, g\,\vec{e}_r/r^2$ außerhalb der negativen z-Achse?

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!