

## ELEKTROMAGNETISCHE INDUKTION &amp; WELLENGLEICHUNGEN

Ströme erzeugen Magnetfelder. Umgekehrt erzeugen Magnetfelder aber auch Ströme, worauf letztlich die Stromerzeugung in Generatoren von Kraftwerken beruht. Letztendlich folgt daraus eine der großen Errungenschaften der Maxwell'schen Theorie, nämlich die Vorhersage der Existenz von elektromagnetischen Wellen.

**[H29] Rotierende Leiterschleife** **[4 + 4 + 2 = 10 Punkte]**

Betrachten Sie eine quadratische Leiterschleife mit Kantenlänge  $a$ , deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Die Leiterschleife befinde sich zur Zeit  $t = 0$  in der  $xy$ -Ebene und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_x$  um die  $x$ -Achse. Der Leiter befinde sich in einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

- Um das Faradaysche Induktionsgesetz anwenden zu können, brauchen Sie das vektorielle Flächenelement  $d\vec{A} = \vec{n}(t)dA$  der Leiterschleife. Berechnen Sie zunächst den zeitabhängigen Normalenvektor für die von der Leiterschleife umschlossene Fläche.
- Berechnen Sie die in dem Leiter erzeugte Induktionsspannung als Funktion der Zeit.
- Überprüfen Sie, dass der resultierende Stromfluss im Leiter damit tatsächlich so fließt, dass er stets der Flussänderung durch sein induziertes  $\vec{B}$ -Feld entgegenwirkt.

**[H30] Wellengleichungen** **[4 + 6 = 10 Punkte]**

- Betrachten Sie die ein-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t).$$

Zeigen Sie, dass jede Funktion der Form  $f(x, t) = f(x - ct)$  eine Lösung dieser Gleichung ist.

- Betrachten Sie die drei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{x}, t) = \Delta f(\vec{x}, t).$$

Zeigen Sie, dass die Kugelwellen  $\frac{e^{i(\omega t \pm kr)}}{r}$  mit  $r = |\vec{x}|$  Lösungen sind. Welche Beziehung muss zwischen  $\omega$  und  $k$  bestehen? *Hinweis:* Gehen Sie zu Kugelkoordinaten über und verwenden Sie, dass die Kugelwelle sphärisch symmetrisch ist. Dann trägt nur der Radialanteil des Laplace-Operators bei.

**[H31] Helmholtz-Gleichung** **[10 Punkte]**

Betrachten Sie nochmals die drei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{x}, t) = \Delta f(\vec{x}, t).$$

Machen Sie einen Separationsansatz  $f(\vec{x}, t) = A(\vec{x})T(t)$  und führen Sie die Separationskonstante  $-k^2$  ein. Zeigen Sie, dass  $A(\vec{x})$  die Helmholtz-Gleichung  $(\Delta + k^2)A(\vec{x}) = 0$  erfüllt. Setzen Sie  $\omega = kc$  und geben die Gleichung an, die  $T(t)$  erfüllt. *Rein pädagogische Bemerkung:* In [H17] haben Sie bereits eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung gefunden.

**HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!  
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!**