VEKOTRANALYSIS

Wir machen uns mit einigen grundlegenden Rechentechniken vertraut, die in der Vektoranalysis eine wichtige Rolle spielen.

[H4] *Identitäten der Vektoranalysis* **[$3+3+3+3=12$ Punkte]**

Wir betrachten Differentialoperatoren wie Divergenz, Rotation und Gradient für Produkte von Vektorfeldern. Beweisen Sie die folgenden Relationen für beliebige ausreichend oft differenzierbare Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$, $\vec{b}(\vec{r})$ und skalare Felder $\phi(\vec{r})$, wobei wir das Argument der Übersichtlichkeit halber im folgenden weglassen:

(a) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$.
(b) $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a}) + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b})$.
(c) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \nabla\times(\nabla\phi) = 0$,
$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0$.
(d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{a}$.

[H5] *Krummlinige Koordinaten* **[$3+3+4=10$ Punkte]**

Betrachten Sie Kugelkoordinaten r, ϑ, φ mit $(x,y,z) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$, wobei wir den radialen Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ definiert haben.

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}$ für den Wechsel von kartesischen auf Kugelkoordinaten. Geben Sie die Basisvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\vartheta$ und $\hat{e}_\varphi$ an.
(b) Berechnen Sie das vektorielle Flächenelement für die Oberfläche eine Kugel vom Radius R. Schreiben Sie es in der Form $\mathrm{d}\vec{f} = \vec{n}\,\mathrm{d}f$ mit dem Flächennormalenvektor $\vec{n}$.
(c) Geben Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten an, d.h. schreiben Sie ∇ als Linearkombination der Basisvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\vartheta$ und $\hat{e}_\varphi$. Berechnen Sie damit die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A} = A_r\hat{e}_r + A_\vartheta\hat{e}_\vartheta + A_\varphi\hat{e}_\varphi$. *Hinweis*: Beachten Sie, dass der Nabla-Operator sowohl auf die Komponenten A_u, als auch auf die Basisvektoren $\hat{e}_u$ wirkt.

[H6] *Fluss durch eine Fläche* **[$2+3+3=8$ Punkte]**

Gegeben ist ein symmetrisch um den Ursprung liegender Zylinder mit Radius R und Höhe h sowie das Vektorfeld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \alpha\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\,.$$

(a) Zeichnen und parametrisieren Sie die Mantelfläche F des Zylinders.
(b) Geben Sie zur Berechnung des Flusses durch die Mantelfläche,

$$\Phi_{\text{Mantel}} = \int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E}\,,$$

den Integranden an und berechnen Sie Φ_{Mantel}. *Hinweis*: Berechnen Sie die Ableitung von $x/\sqrt{1+x^2}$, das könnte Ihnen bei der Auswertung des Integrals nützen ;-)
(c) Wie groß ist Φ_{Mantel} als Funktion von

$$\sin\chi = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}}\,?$$

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!