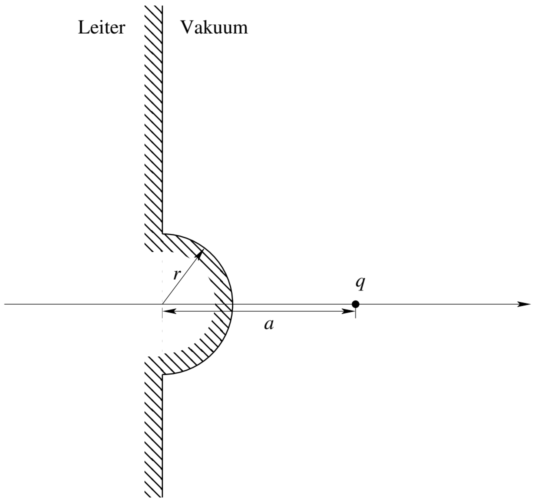
GREENSCHE FUNKTION

Die Greensche Funktion erlaubt es, die Lösung von allgemeinen Randwertproblemen zu konstruieren. Die Greensche Funktion selbst hängt dabei nicht von den konkreten Randbedingungen ab, sondern lediglich von der Geometrie des betrachteten Gebietes, bzw. seines Randes.

[H15] *Spiegelladung IV* **[$2+4+4=10$ Punkte]**

Eine Ladung q befinde sich im Abstand a auf der x-Achse vor einer leitenden Ebene mit einer halbkugelförmigen Auswölbung vom Radius r. Auf der Leiteroberfläche ist das Potential $\Phi = 0$.



(a) Wie viele Spiegelladungen werden benötigt, und wo müssen diese platziert werden? *Hinweis*: Die Spiegelladungen müssen alle außerhalb des Gebietes, in dem sich die Ladung befindet, liegen.
(b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion im Raum der Ladung q mit Hilfe der Spiegelladungsmethode.
(c) Zeigen Sie, dass Ihr Ansatz die Randbedingung erfüllt.

[H16] *Greensche Funktion* **[$2+2+3+2+1=10$ Punkte]**

Gesucht ist das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Halbraum $z>0$ mit den Randbedingungen

$$\Phi(x,y,0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \le 0 \\ \phi_0 & \text{falls } x > 0 \end{cases} .$$

Die Randbedingungen im Unendlichen brauchen Sie nicht weiter zu berücksichtigen.

(a) Geben Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ an.
(b) Bestimmen Sie die Normalableitung $\dfrac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r},\vec{r}\,')$ bei $z'=0$. In welche Richtung zeigt der Normalenvektor?
(c) Berechnen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ für $z \ge 0$ aus der Randbedingung und der Greenschen Funktion. *Hinweis*: $\int \mathrm{d}u \frac{1}{u^2+1} = \arctan(u)$.
(d) Überprüfen Sie, dass $\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0$ ist.
(e) Wie verhält sich das Potential für festgehaltenes z als Funktion von x? Was ergibt sich für $z \to \infty$, und hätten Sie dies erwartet?

[H17] *Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung* **[$10+2^*$ Punkte]**

Eine weitere, in der Physik sehr wichtige Gleichung ist die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Wir werden ihr später bei der Behandlung der vollständigen inhomogenen Maxwell-Gleichungen wieder begegnen. Offenbar geht diese Gleichung für $k=0$ in die Poisson-Gleichung über. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$G_\pm(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

die Greenschen Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d.h., dass

$$(\Delta' + k^2)G_\pm(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,').$$

Zusatzfrage: Was stellen diese Greenschen Funktionen physikalisch dar?

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!