KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN UND MULTIPOLENTWICKLUNG

In der Vorlesung wurden der elektrische Dipol und die Legendre-Polynome behandelt. Dazu sehen wir uns ein paar Beispiele an.

[H21] *Wechselwirkungsenergie* **[$4+5=9$ Punkte]**

Zwei elektrische Dipole mit jeweils verschwindend kleiner Ausdehnung und mit Dipolmomenten $\vec{p}^{\,(1)}$ bzw. $\vec{p}^{\,(2)}$ befinden sich an den festen Orten $\vec{r}^{\,(1)}$ bzw. $\vec{r}^{\,(2)}$.

(a) Geben Sie die Wechselwirkungsenergie der beiden Dipole an.

(b) Setzen Sie nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\vec{r}^{\,(1)} = 0$ und $\vec{r}^{\,(2)}$ parallel zur z-Achse. Der Dipol $\vec{p}^{\,(1)}$ stehe im Winkel $\vartheta^{(1)}$ zur z-Achse. In welchem Winkel zur z-Achse hat der Dipol $\vec{p}^{\,(2)}$ die kleinstmögliche Energie?

[H22] *Drahtschleife* **[$2+3+4+3=12$ Punkte]**

Ein homogen geladener, kreisförmiger Draht mit verschwindend kleinem Querschnitt liegt konzentrisch zum Ursprung in der xy-Ebene. Der Kreis soll Radius R haben und die Gesamtladung Q tragen.

(a) Geben Sie das elektrostatische Potential entlang der z-Achse an.

(b) Verwenden Sie Taylor-Entwicklungen, um das asymptotische Verhalten des Potentials aus (a) in den Fällen $z \to 0$ und $|z| \to \infty$ zu finden. Geben Sie jeweils die zwei ersten nicht verschwindenden Ordnungen an. *Zur Kontrolle*: Für $|z| \to \infty$ gilt

$$\Phi(0,0,z) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|z|}\left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right).$$

(c) Bestimmen Sie nun das Potential auch außerhalb der z-Achse, indem Sie Kugelkoordinaten verwenden. Wie lauten jeweils die zwei führenden Terme im asymptotischen Verhalten für $r \to 0$ und $r \to \infty$? *Hinweis*: Denken Sie an die Legendre-Polynome.

(d) Geben Sie das asymptotische Verhalten auf der x-Achse für $x \to 0$ und $|x| \to \infty$ an (wieder jeweils die zwei führenden Terme).

[H23] *Kreisscheibe* **[$4+5=9$ Punkte]**

Betrachten Sie eine geladene Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Radius R und der Ladungsdichte

$$\varrho(r_\perp, \varphi, z) = \frac{Q}{\pi R^2}\delta(z)\,\theta(R - r_\perp)\cos\varphi\,.$$

Zur Erinnerung: In Zylinderkoordinaten ist $r_\perp = \sqrt{x^2+y^2}$, und $\theta(u) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } u > 0 \\ 0 & \text{wenn } u < 0 \end{cases}$.

(a) Berechnen Sie die kartesischen Komponenten p_k, $k = 1,2,3$, des Dipolmomentes $\vec{p} = \int \mathrm{d}^3r\, \varrho(\vec{r})\vec{r}$.

(b) Die sphärischen Dipolmomente $q_{1,m}$ mit $m = -1, 0, 1$ sind gemäß

$$q_{1,m} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int \mathrm{d}^3r\, \varrho(\vec{r})\, r\, Y_{1,m}(\vartheta,\varphi)$$

definiert. Die notwendigen $Y_{1,m}$ sind in [P17] angegeben. Berechnen Sie die $q_{1,m}$ und finden Sie damit die Beziehungen zwischen den kartesischen Komponenten p_k und den sphärischen Komponenten $q_{1,m}$.

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!