RANDWERTPROBLEME

Das Lösen von Randwertproblemen gehört zu den wesentlichen Grundfertigkeiten, die in Feldtheorien wie der Elektrodynamik eine zentrale Rolle spielen. Die allgemeine Lösung eines Randwertproblems lässt sich zum Beispiel mit Hilfe der Greenschen Funktion konstruieren.

[P10] *Elektrostatik in einer Dimension*
Wir wollen die ein-dimensionale Poisson-Gleichung $\phi''(x) = h(x)$ im Intervall $x \in [0, \ell]$ lösen. Die Randbedingungen seien Dirichlet-Randbedingungen $\phi(0) = \phi_1$, $\phi(\ell) = \phi_2$.

(a) Zeigen Sie den Greenschen Satz in einer Dimension.

(b) Die definierenden Gleichungen der Greenschen Funktion für $(\partial_{x'})^2$ im Intervall $[0, \ell]$ mit Dirichlet-Randbedingungen lauten

$$(\partial_{x'})^2 \, G(x, x') = \delta(x - x') \qquad \text{Differentialgleichung,} \tag{1}$$

$$G(x, 0) = G(x, \ell) = 0 \qquad \text{Randbedingungen.} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $G(x, x') = \frac{1}{2}|x - x'| + \frac{1}{\ell}xx' - \frac{1}{2}(x + x')$ ist, dass also dieses G die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung $\phi(x)$ an, ausgedrückt durch $G(x, x')$, $h(x)$ sowie die Werte ϕ_1, ϕ_2 und $G'(x, 0)$, $G'(x.\ell)$.

[P11] *Poisson-Gleichung*
Die Poisson-Gleichung reduziert sich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, wenn die Ladungsverteilung radialsymmetrisch ist, d.h. $\varrho(\vec{r}) = \varrho(r)$ hängt nur vom Abstand ab. Die Poisson-Gleichung lautet $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$. Wir betrachen die Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{8\pi\lambda^3} \, \mathrm{e}^{-r/\lambda}$ für $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung $\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r \, \varrho(\vec{r})$.

(b) Machen Sie den Ansatz $\Phi(\vec{r}) = \frac{y(r)}{r}$, wobei Sie annehmen, dass $y(r) \to \text{const}$ für $r \to \infty$ geht. Welche Differentialgleichung muss $y(r)$ erfüllen?

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung an.

(d) Machen Sie den Ansatz $y(r) = f(r) \, \mathrm{e}^{-r/\lambda}$ und finden Sie so die Lösung der inhomogenen Gleichung.

(e) Bestimmen Sie die noch freien Parameter aus der allgemeinen Lösung des homogenen Problems durch die Randbedingungen $\Phi(r \to \infty) \to 0$ und $\Phi(r \to 0) \to \text{const}$ (gemeint ist, dass $\Phi(r \to 0)$ einen endlichen Wert hat). Geben Sie damit $\Phi(r)$ in führender Ordnung für $r \to \infty$ und für $r \to 0$ an. *Hinweis*: für den Fall $r \to 0$ gilt $r \ll \lambda$.

(f) Skizzieren Sie $\varrho(r)$ und $\Phi(r)$. Vergleichen Sie $\Phi(r)$ mit dem Potential einer Punktladung mit geeignet gewählter Ladung Q'. Wie groß ist Q' ?