

INTEGRATION, WIRKUNGSPRINZIP

Nach etwas Integrationsrechnung in mehreren Dimensionen betrachten wir das Wirkungsprinzip an einfachen Beispielen.

[H5] Masse und Schwerpunkt **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Ein homogener Körper mit Durchmesser $2d$, Höhe h und Massendichte ρ bestehe aus den Punkten (x, y, z) mit

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq d, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{z}{a} \leq \frac{h}{a}.$$

Bestimmen Sie die Masse $M = \int d^3x \rho$ und den Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}$. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

[H6] Trägheitstensor **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie die Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta^{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta^{ij} - x^i x^j)$$

einer homogenen Kugelschale als Funktion der Masse M und des Innen- und Außenradiuses R_- und R_+ . Warum muss man höchstens 6 Integrale ausführen, obwohl die Indexpaare i, j insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Werte annehmen?

Gegen welchen Wert strebt Θ^{33} , falls die Kugelschale bei unveränderter Masse dünn gemacht wird?

[H7] Relativistische Bewegung im elektromagnetischen Feld **[7 + 7 = 14 Punkte]**

Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich in einem zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L}(t, \vec{x}, \vec{v}) = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} - qV(\vec{x}) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}).$$

Wie üblich, setzen wir $c = 1$.

- Betrachten Sie zunächst den Fall eines freien Teilchens, $V = \vec{A} = 0$. Berechnen Sie Energie und Impuls des Teilchens mit Hilfe der entsprechenden Noether-Ladungen.
- Berechnen Sie die Euler-Ableitung und zeigen Sie damit, dass die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1 - \vec{v}(t)^2}} = q \left(\vec{E}(\vec{x}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}) \right)$$

lauten. Wie hängen offenbar \vec{E} und \vec{B} mit V und \vec{A} zusammen?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!