Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe 08.06.2015 vor der Vorlesung

KOMPLEXE FUNKTIONEN

Das Rechnen mit komplexen Funktionen, insbesondere Wegintegrale komplexer Funktionen, ist ein sehr nützliches Werkzeug in der theoretischen Physik.

[H20] *Residuensatz* **[6 + 6 = 12 Punkte]**

(a) Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,(5 - 3\cos\theta)^{-1}$ mit dem Residuensatz: Parametrisieren Sie dazu den Einheitskreis in der komplexen Ebene, $z(\theta) = \ldots$, und zeigen Sie

$$\frac{2\mathrm{i}}{3}\oint \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5 - 3\cos\theta}\,.$$

Bestimmen Sie die Pole des Integranden, die umlaufenen Residuen, und den Wert des Integrals.

(b) Berechnen Sie für $n \geq 0$ die Integrale $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,(5 - 3\cos\theta)^{-1}$ mit dem Residuensatz, indem Sie wie in (a) den Einheitskreis in der komplexen Ebene parametrisieren und damit

$$c_n = \frac{2\mathrm{i}}{3}\oint \frac{\mathrm{d}z\, z^n}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{5 - 3\cos\theta}$$

zeigen. Bestimmen Sie die Pole des Integranden, die umlaufenen Residuen, und zeigen Sie so $c_n = \frac{\pi}{2}\frac{1}{3^n}$. Bestimmen Sie für $n < 0$ die Integrale durch komplexe Konjugation, und leiten damit die rechte Seite der folgenden Reihendarstellung her:

$$\frac{1}{5 - 3\cos\theta} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3^m}\cos m\theta\,.$$

[H21] *Konforme Abbildungen* **[4 + 8 = 12 Punkte]**

Abbildungen der xy-Ebene bilden Punkte (x, y) auf $(x', y') = (u(x, y), v(x, y))$ ab und entsprechend Kurven $(x(t), y(t))$ auf Kurven $(u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)))$.

(a) Zeigen Sie, dass bei differenzierbaren Abbildungen und Kurven die Tangentialvektoren durch

$$\begin{pmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$$

linear zusammenhängen.

(b) Zeigen Sie weiter: Falls $f(z) = u + \mathrm{i}v$ eine komplex differenzierbare Funktion ist, so besagen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass es sich bei dieser linearen Abbildung von Tangentialvektoren um eine Streckung um den Faktor $\sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}$ und eine Drehung um $\tan\theta = \partial_x v/\partial_x u$ handelt (falls $\sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}$ nicht verschwindet). Dies ist also nichts anderes als die Multiplikation des komplexen Tangentialvektors $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}$ mit $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \partial_x u + \mathrm{i}\partial_x v = \partial_y v - \mathrm{i}\partial_y u$. Beachten Sie hierzu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$. (Der Streckungsfaktor und der Drehwinkel hängen normalerweise von (x, y) ab.)

Komplex differenzierbare Funktionen bilden also, wo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ nicht verschwindet, die komplexe Ebene konform ab: Größenverhältnisse von Tangentialvektoren am selben Punkt und Winkel zwischen ihnen bleiben unverändert.

[H22] *Lorenz-Eichung* **[6 Punkte]**

Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen mit $c = 1$, dass

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,', t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad \text{und} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

die Bedingung für die Lorenz-Eichung erfüllen, $\nabla\cdot\vec{A} + \dot{\Phi} = 0$.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!