MEHR FOURIERTRANSFORMATION

Die Fouriertransformation ist aus vielen Gründen ein sehr leistungsfähiges Instrument in der Physik. So kann man mit ihrer Hilfe oft Differentialgleichungen leichter lösen.

[H26] *Coulomb-Potential* **[$5+5+5+5=20$ Punkte]**

Berechnen Sie in Kugelkoordinaten die Fouriertransformierte des Coulomb-Potential $V(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{-e^2}{r}$, also

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{1}{4\pi}\frac{-e^2}{r}\,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zentralpotential $V(r) = V(|\vec{r}|)$ und zeigen Sie, dass dessen Fouriertransformierte nur von $k = |\vec{k}|$ abhängt. Wählen Sie dazu die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$ und drücken Sie das Skalarprodukt im Exponenten durch Kugelkoordinaten aus. Die φ-Integration ist einfach. Ebenso elementar lässt sich auch über $\cos\theta$ integrieren. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte in der Form

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int \mathrm{d}^3r\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,V(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{k}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, \sin(kr)\, V(r)$$

geschrieben werden kann.

(b) Setzen Sie für $V(r)$ nun das Yukawa-Potential $V(r) = \frac{-e^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r}$ ein und führen Sie die r-Integration aus. Für die Fouriertransformierte sollten Sie $\tilde{V}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{-e^2}{4\pi}\frac{1}{k^2+m^2}$ erhalten.

(c) Führen Sie nun den Grenzwert $m \to 0$ durch, um die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials zu erhalten. Warum scheitert die direkte Berechnung wie in (b)?

(d) Betrachten Sie die Poisson-Gleichung $\Delta\frac{-e^2}{4\pi}\frac{1}{r} = e^2\delta(\vec{r})$. Wie lautet die Fouriertransformation dieser Gleichung? Finden Sie die Fouriertransformierte der Dirac'schen δ-Distribution und bestimmen Sie damit durch zweifache Integration der Poisson-Gleichung die Fouriertransformation des Coulomb-Potentials auf einfache Weise.

[H27] *Strahlung aus großer Entfernung* **[$5+5=10$ Punkte]**

Von einem zunächst lokalisierten Wellenpaket

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|}\left(a^*(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + a(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right)\Big|_{\omega=c|\vec{k}|}$$

erreicht einen Beobachter, der weit vom ursprünglichen Lokalisierungsgebiet entfernt ist, nur der Anteil mit Wellenvektor in Verbindungsrichtung, die als z-Achse gewählt werden kann. Daher tragen zum dortigen Feld nur Amplituden der Form

$$a(\vec{k}) = (2\pi)^3\, 2k_z\, \delta(k_x)\delta(k_y)\theta(k_z)b(k_z)$$

bei, wobei $b(k)$ eine nicht weiter eingeschränkte, beliebige Funktion ist.

(a) Zeigen Sie im Maßsystem mit $c = 1$, dass solch ein Wellenpaket die Form

$$\phi(t,\vec{x}) = h(t-z)\,, \qquad h(t-z) = \int \mathrm{d}k\, \tilde{h}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-z)}\,, \qquad \tilde{h}(k) = \begin{cases} b^*(k) & k>0 \\ b(-k) & k<0 \end{cases}\,,$$

hat, also eine ebene Welle ist, die sich mit beliebig vorgegebener Form, also dispersionsfrei, mit Geschwindigkeit $c = 1$ in z-Richtung bewegt.

(b) Die allgemeine Lösung f der Wellengleichung $({\partial_t}^2 - {\partial_z}^2)f = 0$ in einer Zeit- und einer Raumdimension ist von der Form $f = h(t-z) + g(t+z)$. Zeigen Sie dies, indem Sie f als Funktion $f(t_-, t_+)$ der retardierten und avancierten Zeit $t_- = t - z$, $t_+ = t + z$ auffassen und $({\partial_t}^2 - {\partial_z}^2)f = 4\partial_-\partial_+ f$ herleiten. Was besagt dies für $\partial_+ f$, was besagt $\partial_+ f = G(t_+)$ für f?

Bitte wenden!

SPIELREGELN ZUR COMPUTERÜBUNG

Die Bearbeitung der Computerübungen erfolgt, wie bei den Hausübungen, allein. Der Lösungsweg soll vollständig mit *Mathematica* ausgeführt und in einem "Notebook" dokumentiert werden. Ein Ausdruck davon ist abzugeben. Zusätzlich müssen Sie Ihre Lösung vorführen und erläutern. Dafür bieten wir pro Computerübung zwei Termine an. Diese werden im Stud.IP noch bekannt gegeben.

Die Computerübungen sind Teil der Studienleistung. Sie müssen *alle* sinnvoll bearbeitet werden. Die Punkte dienen nur als grobe Richtschnur. Bei der Vorführung wird Ihnen mitgeteilt, ob Ihre Lösung ausreichend bearbeitet worden ist. Bitte beachten Sie: Eine ausreichende Dokumentation und Kommentierung Ihres Notebooks ist wesentlicher Bestandteil der Lösung. Es wird diesmal keine Möglichkeit zur Nachbesserung geben!

Bringen Sie zum Termin für die Vorführung bitte Ihr eigenes Notebook mit. Sollte dies nicht möglich sein, müssen Sie Ihre Lösung zuvor per Email rechtzeitig sowohl an Michael Flohr als auch an Ihre(n) TutorIn schicken. Aus Sicherheitsgründen können wir keine fremden USB-Sticks mehr einlesen.

Die Sprechstunde für die Computerübungen findet nur noch nach vorheriger Vereinbarung statt. Sie ist im vergangenen Semester ohnehin praktisch nie genutzt worden.

[C2] *Fourierreihe und Fouriertransformation* **[$5 + 5 + 5 + 5^* = 15 + 5^*$ Punkte]**

Ziel dieser Computerübiung ist es, eine Routine zu erstellen, die für eine ihr übergebene Funktion deren Fourierreihe bis zu einer gegebenen Ordnung berechnet. Damit sollen Sie dann einige Vergleiche und Überlegungen anstellen.

(a) Erstellen Sie zunächst eine Routine, die als Argumente eine Funktion `f[t]` und eine positive Zahl `n` hat. Sie soll die Koeffizienten der (reellen) Fourierreihe aus [P18] bis zur Ordnung `n` ausgeben. Der Einfachheit halber betrachten wir Funktionen im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

(b) Führen Sie für drei von Ihnen frei gewählte Funktionen Ihre Routine für $\mathtt{n} = 5$, $\mathtt{n} = 10$ und $\mathtt{n} = 20$ aus. Plotten Sie jeweils die Funktion und die resultierende Fourierreihe bis zu diesen Ordnungen. Vergleichen Sie so, wie gut oder schlecht die Fourierreihe die Funktion annähert.

(c) Erstellen Sie eine Routine, die die Fouriertransformation (siehe [H23]) der Funktion `f[t]` berechnet. Die Funktion ist jetzt also auf $I = \mathbb{R}$ definiert. Erstellen Sie für die drei Funktionen aus (b) Plots, in denen das Fourierspektrum, also die Fourierkoeffizenten für den Fall $\mathtt{n} = 20$ und die Fouriertransformierte übereinander geplottet werden. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Hinweis: Die nötigen Integrationen sind am besten numerisch durchzuführen. Die Routinen sind natürlich ohne Hilfe der in MATHEMATICA eingebauten Befehle zur Fourierreihe und Fouriertransformation zu erstellen!

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!