Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
24.04.2015

## INTEGRATION, WIRKUNGSPRINZIP

Wir üben noch weiter das Integrieren, insbesondere partielle Integration, und wenden uns dann dem Wirkungsprinzip zu.

**[P3]** *Partielle Integration?*
Berechnen Sie für ganzzahlige $n, m$ die Integrale

(a) $I_n = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$,
(b) $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, \cos mx\, \cos nx$,
(c) $\hat{I}_{m,n} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, \sin mx\, \cos nx$.

Berücksichtigen Sie insbesondere die Fälle $n = 0$ und $n = m$. Stellen Sie die trigonometrischen Funktionen als Linearkombination von Exponentialfunktionen dar.

**[P4]** *Gauß-Integral*
Zeigen Sie $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, indem Sie $I^2$ als zweidimensionales Integral deuten, das in Polarkoordinaten leicht ausgewertet werden kann. Berechnen Sie durch Substitution der Integrationsvariablen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$, und durch Ableiten dieses Ergebnisses nach $a$ die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{-ax^2}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^4 \mathrm{e}^{-ax^2}$.

**[P5]** *Euler-Ableitung*
Wir betrachten eine Lagrangefunktion $\mathcal{L}(t, x, v)$ in den Koordinaten $x = (x^1, \ldots, x^N)$ mit $v = \dot{x}$. Wir betrachten andere Koordinaten $(y, w = \dot{y})$, in denen wir die ursprünglichen Koordinaten ausdrücken können: $x = x(t, y)$.

(a) Wie hängen die Geschwindigkeiten $v$ und $w$ miteinander zusammen?
(b) Geben Sie die durch den Koordinatenwechsel definierte Lagrangefunktion $\tilde{\mathcal{L}}(t, y, w)$ an.
(c) Zeigen Sie: Die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\tilde{\mathcal{L}}$ gelten in $y$-Koordinaten genau dann wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\mathcal{L}$ in $x$-Koordinaten erfüllt sind.