

POTENTIALTHEORIE

In der Elektro- und Magnetostatik ist vor allem das Berechnen der Potentiale zu gegebenen Ladungs- und Stromverteilungen ein wichtiges Problem.

[P12] Multipolentwicklung

Das Potential einer räumlich beschränkten Ladungsdichte $\rho(\vec{y})$, die für $|\vec{y}| > R$ verschwindet, ist durch

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^i y^i / r^2 + y^i y^i / r^2}},$$

gegeben.

- Entwickeln Sie den Integranden für große Abstände $r = |\vec{x}| > R$ nach y^i/r bis einschließlich quadratischer Ordnung. Geben Sie so das Potential bis auf Fehler der Ordnung $1/r^4$ an.
- Geben Sie die dabei auftretenden Koeffizienten, nämlich die Gesamtladung Q , das Dipolmoment \vec{p} und das Quadrupolmoment Q^{ij} , als Integrale über die Ladungsdichte an.
- Welchen Wert hat das Dipolmoment, wenn (bei nicht verschwindender Gesamtladung Q) der Ladungsschwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{Q} \int d^3y \vec{y} \rho(\vec{y})$$

als Ursprung der x -Koordinaten gewählt wird?

- Warum kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Quadrupolmoment Q^{ij} als spurfrei, also $\delta_{ij} Q^{ij} = 0$, vorausgesetzt werden?

[P13] Dipolmoment

Bestimmen Sie das Dipolmoment einer Vollkugel, die aus zwei entgegengesetzt geladenen Kugelhälften mit jeweils homogener Ladungsdichte besteht. Die Gesamtladung auf den Hälften ist einmal Q und einmal $-Q$.

[P14] Distributionen

Zeigen Sie durch Anwenden auf Testfunktionen

(a)

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x), \quad \text{wobei } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) \delta''(x) = f(0) \delta''(x) - 2f'(0) \delta'(x) + f''(0) \delta(x).$$

(c)

$$\frac{d^2}{dt^2} (\theta(t) \sin(\omega t)) = -\omega^2 \theta(t) \sin(\omega t) + \omega \delta(t).$$