MEHR FOURIERTRANSFORMATION

Wir vergleichen unter anderem die Fourierreihe mit der Fouriertransformation.

[P20] *Parsevalsche Gleichung*
Stellen Sie die Funktion $g(x) = x^2$ im x-Intervall $I = [-1, 1]$ durch ihre Fourierreihe dar. Was besagt die Parsevalsche Gleichung für diese Funktion für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\,?$$

[P21] *Übergang zum Integral*
Wir betrachten die Rechteckfunktion, definiert als

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{wenn} \quad |x| > a \end{cases} \quad .$$

(a) Beginnen Sie mit dem vollständigen orthonormalen System $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n x/L}$, wobei n über die ganzen Zahlen läuft, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit dem Sie periodische Funktionen im Intervall $x \in [-L, L]$ entwickeln können. Bestimmen Sie die Koeffizienten g_n in der Fourierreihe $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n f_n(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Fouriertransformierte

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

der Rechteckfunktion $g(x)$. Damit können Sie die ursprüngliche Funktion schreiben als

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{g}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

(c) Vergleichen Sie nun die Fourierreihe mit der Fouriertransformation. Führen Sie dazu in der Fourierreihe in geeigneter Weise eine Größe k_n ein. Zeigen Sie dann, dass die Fourierreihe für unendlich große Intervalllängen $L \to \infty$ in die Fouriertransformation übergeht.