

MAXWELL THEORIE

Wir wollen unsere bisherigen Kenntnisse von Hamiltonschen Systemen mit Zwangsbedingungen im Falle der Maxwell-Theorie anwenden. Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \vec{j}, \end{aligned} \quad \partial_t \rho = -\nabla \cdot \vec{j}.$$

**Kovariante Schreibweise.** Ersetze Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  durch Symbole  $\partial_i$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_0$ . Ersetze Vektoren durch kontravariante Tensoren:  $\vec{a} \equiv (a^1, a^2, a^3) \equiv a^i$ . Als Metrik verwenden wir  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \eta_{\mu\nu}$ .

Sodann schreibe Kreuzprodukte als  $\nabla \times \vec{a} = \epsilon^{ijk} \partial_j a^k$  mit  $\epsilon^{123} = 1 = -\epsilon_{123}$ . Wie lauten nun die Maxwell-Gleichungen? Wer es noch nicht weiß, überprüfe bitte die Identität  $\epsilon^{ij} \epsilon^k{}_{mn} = -(\delta^i{}_m \delta^j{}_n - \delta^i{}_n \delta^j{}_m)$ .

Führe nun die Definitionen  $j^0 = \rho$ ,  $F^{0i} = -E^i$  und  $F^{ij} = -\epsilon^{ij} B^k$  ein. Zeige, dass die Maxwell-Gleichungen nun die Form

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu, \quad \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \text{zyklisch} = \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \text{zyklisch} = 0$$

annehmen. Überzeuge Dich, dass  $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} F^{jk}$  ist. Leite die Wellengleichung  $\square F_{\mu\nu} = 0$  her, indem Du  $\partial_\mu$  auf die zweite kovariante Maxwell-Gleichung anwendest und dann die erste verwendest,  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ .

**Variationsprinzip.** Nun wollen wir diese Gleichungen aus einem Variationsprinzip herleiten. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns auf den quellenfreien Fall  $j^\mu = 0$ . Zeige zunächst, dass die zweite kovariante Maxwell-Gleichung automatisch erfüllt ist, wenn man den Ansatz  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  macht. Beachte, dass diese Wahl für  $F$  lokal immer möglich ist. Überzeuge Dich, dass  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  für beliebiges  $\Lambda$  immer das selbe  $F_{\mu\nu}$  liefert. Wir wollen die  $A_\mu(x^\lambda)$  von nun an als generalisierte Koordinaten des Konfigurationsraumes betrachten.

Zeige nun, dass die folgende Wirkung die Maxwell-Gleichungen als Gleichungen in  $A_\mu$  liefert:

$$S[A(x)] \equiv \int dt \int d^3x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \equiv \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\lambda A_\nu).$$

**Hamiltonsche Formulierung.** Zeige, dass die kanonisch konjugierten Impulse gegeben sind als  $\pi^\mu(x) = -F^{0\mu}(x)$ . Wir finden also  $\pi^0 = 0$ ,  $\pi^i = -F^{0i}$  und somit  $\pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0$ . Diese letzte Identität können wir nach den "Geschwindigkeiten" auflösen:  $\partial_0 A_i = -\pi_i + \partial_i A_0$ . Beachte, dass wir dies aber *nicht* für  $\partial_0 A_0$  machen können! Überprüfe, dass die Matrix der zweiten (Funktional-)Ableitungen nicht invertierbar ist:

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu(x)) \delta(\partial_0 A_\nu(x))} = (-\eta^{\mu\nu} + \eta^{0\mu} \eta^{0\nu}) \delta^{(3)}(x - x').$$

Verwende nun die Legendre-Transformation, um den kanonischen Hamiltonian herzuleiten:

$$H_{\text{kanon.}} = \int d^3x \left[ -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - A_0 (\partial_i \pi^i) + \pi^0 (\partial_0 A_0) \right].$$

*Hinweis:* Um dieses Resultat zu erhalten, muss einmal partiell integriert werden (Randterme werden vernachlässigt).

Mache Dir klar, dass die ersten beiden Terme  $\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}$  entsprechen. Der letzte Term ist keine Funktion der Phasenraum-Variablen. Überprüfe, dass die Hamiltonsche Bewegungsgleichung für  $A_0$  eine triviale Identität ist, so dass die Zeitabhängigkeit von  $A_0$  unbestimmt ist. Betrachte schließlich die Hamiltonsche Bewegungsgleichung für  $\pi^0$  und zeige, dass sie zu der Bedingung  $\partial_0 \pi_0 = \partial_i \pi^i$  führt.

**Zwangsbedingungen.** Um den letzten Term im Hamiltonian los zu werden, können wir wie folgt argumentieren: Wir setzen  $\pi^0 = 0$  für eine gewählte Anfangszeit und fordern, dass dies für alle späteren Zeiten gilt. Das geht aber nur, wenn  $\partial_i \pi^i = 0$  für alle Zeiten gilt, was nichts anderes als das Gauß-Gesetz ist, also eine der Maxwell-Gleichungen. Mache Dir klar, dass das Weglassen des letzten Termes gleichbedeutend damit ist, die Zwangsbedingung (erster Art)  $\pi^0 = 0$  auf dem Phasenraum  $(A^\mu, \pi_\mu)$  zu fordern. Das Gauß-Gesetz tritt dann als Konsistenz-Bedingung, bzw. als Zwangsbedingung zweiter Art,  $\chi = \partial_i \pi^i$ , auf, da es benötigt wird, damit die Zwangsbedingung erster Art für alle Zeiten gilt. Da  $A_0$  unbestimmt bleibt, können wir es durch eine beliebige Funktion  $\lambda(t)$  im dritten Term ersetzen.

**Eichtransformationen.** Berechne die kanonischen Transformationen, die durch die beiden Zwangsbedingungen erzeugt werden:

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon A_\mu(x) &= \left\{ A_\mu(x), \int d^3x' \varepsilon(x') \pi^0(x') \right\}, \\ \delta_\eta A_\mu(x) &= \left\{ A_\mu(x), \int d^3x' \eta(x') \partial_i \pi^i(x') \right\}, \\ \delta\pi(x) &= 0.\end{aligned}$$

Was folgt, wenn wir  $\varepsilon(x) = -\partial_0 \eta(x)$  wählen?